情報理学入門(2)

～オートマトン～

システム情報科学研究院

竹田　正幸

オートマトンとは？

- AUTOMATON
  1. 機械的に行動する人.
  2. 自動的に動くもの; 自動人形; (機械の) 自動装置; 《コンピュータ》オートマトン.

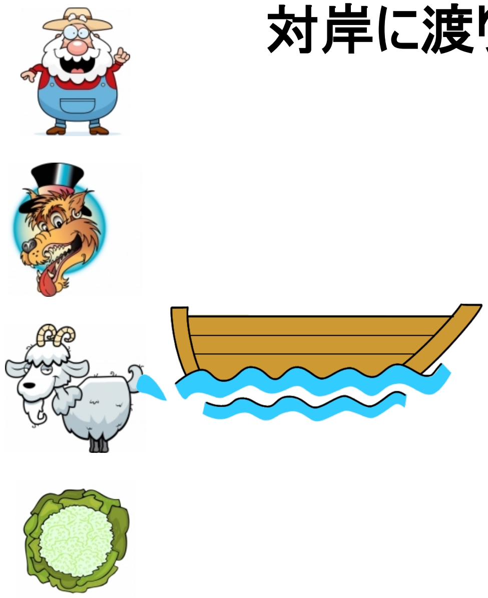
例１

狼とヤギとキャベツ

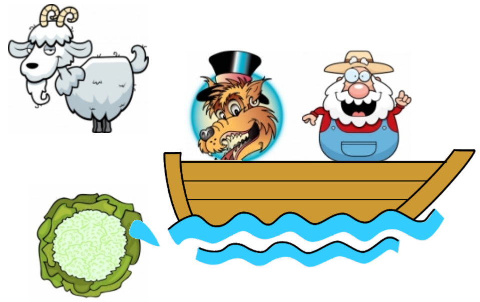
狼とヤギとキャベツ

- 狼とヤギを連れキャベツを持った農夫が川岸にいる。
  - 川にはボートがあるが農夫の他には動物１頭かキャベツ１個しか乗せられない。
  - 農夫がいなければ、狼はヤギを襲うし、ヤギはキャベツを食べてしまう。
- すべてを無事に対岸に渡すには？

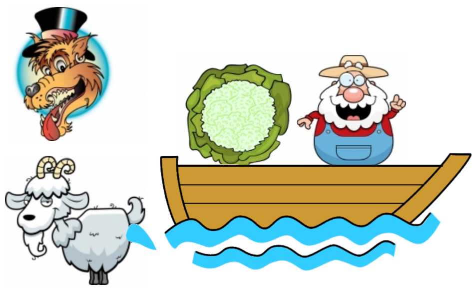
対岸に渡りたい



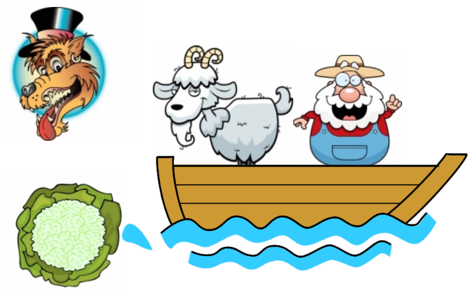
これはダメ



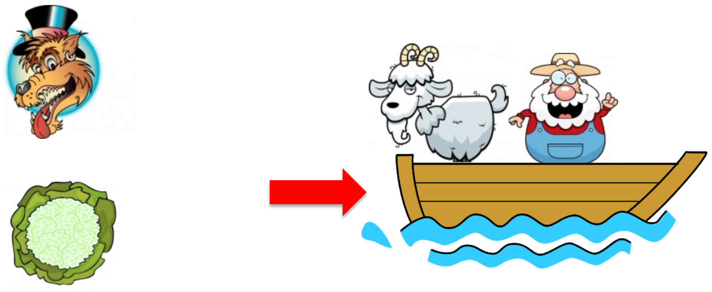
これもダメ



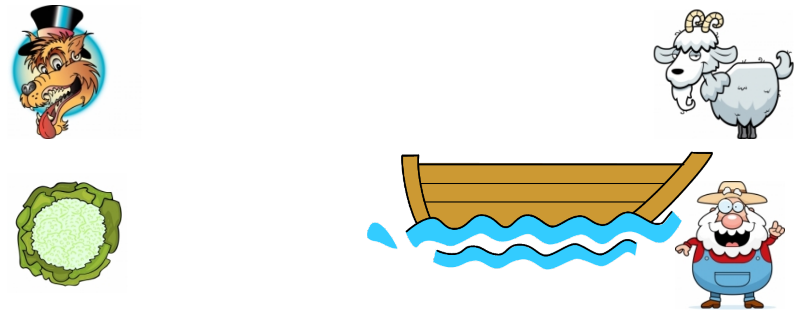
これはOKで．．



これはOKで．．



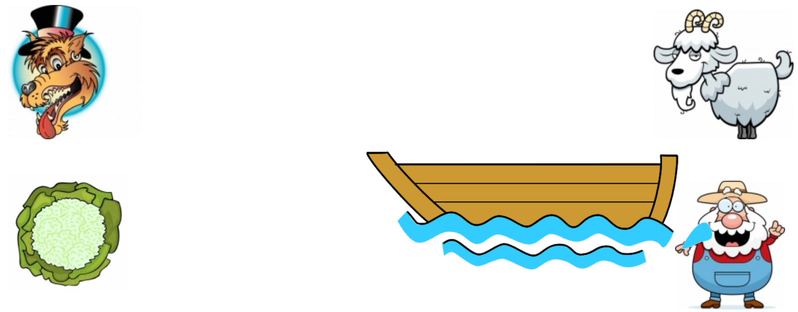
こうなるが．．



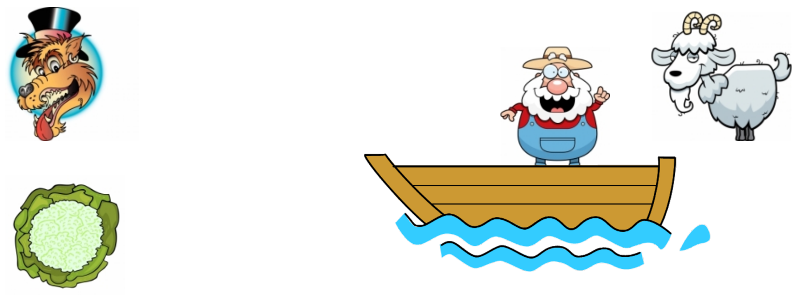
これからどうしたらいいか？

考える時間．．．

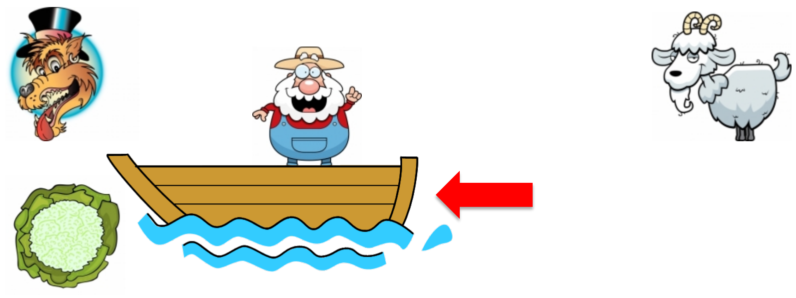
解答例



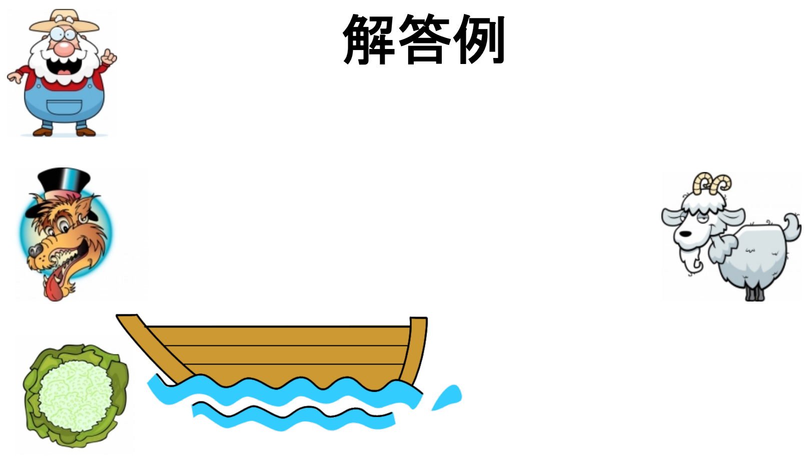
解答例



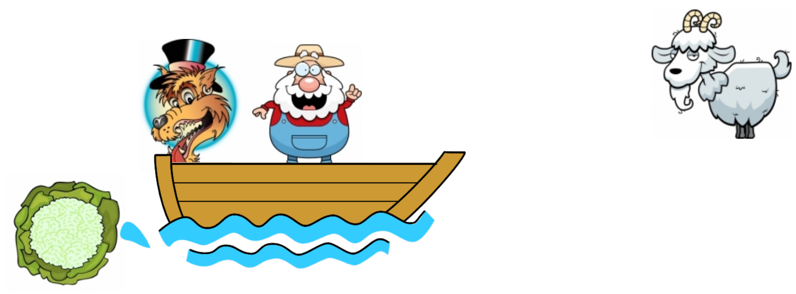
解答例



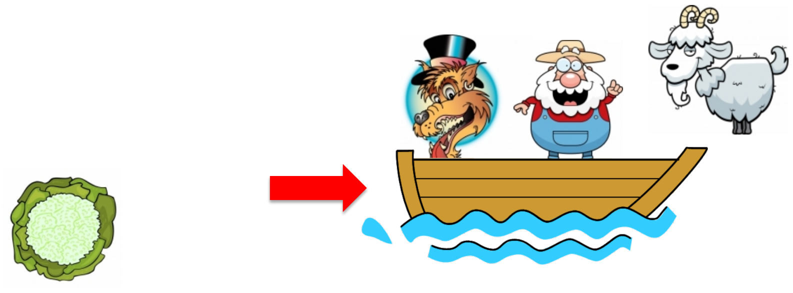
解答例



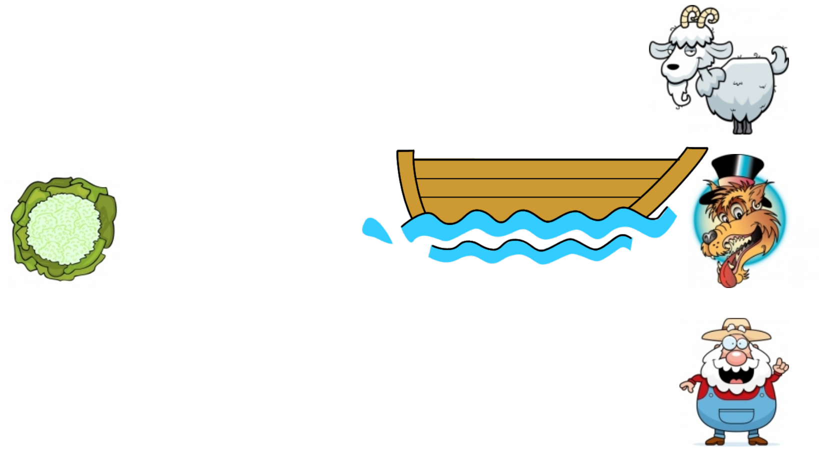
解答例



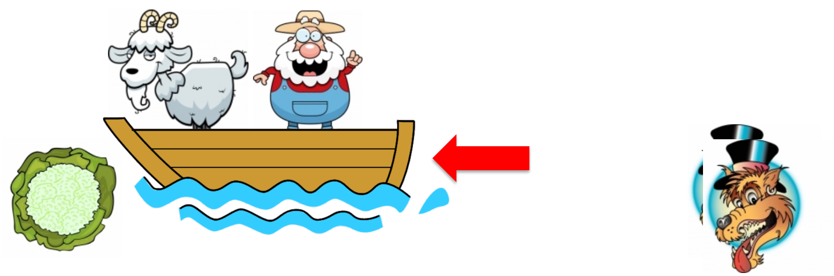
解答例



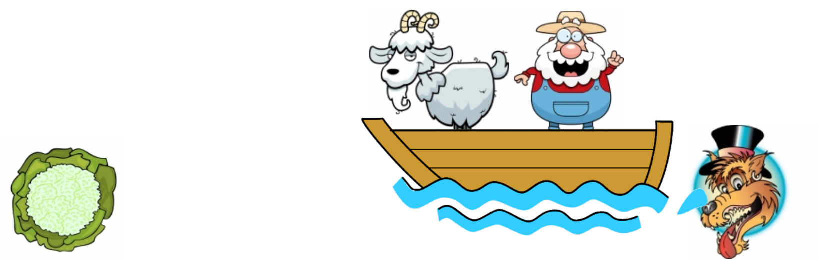
解答例



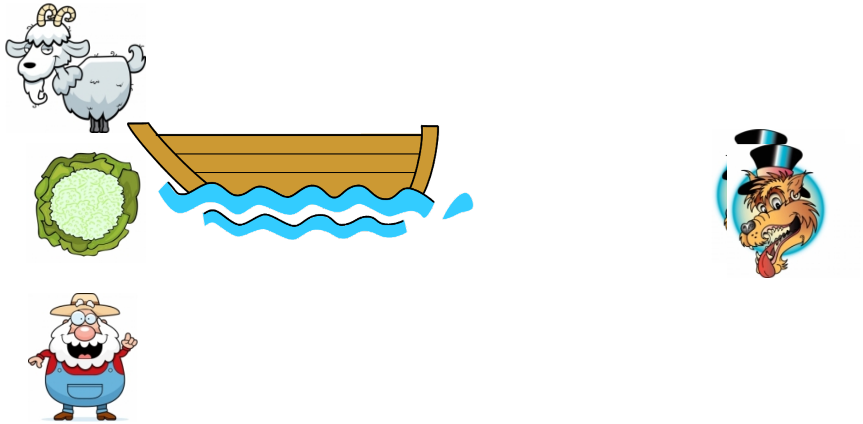
解答例



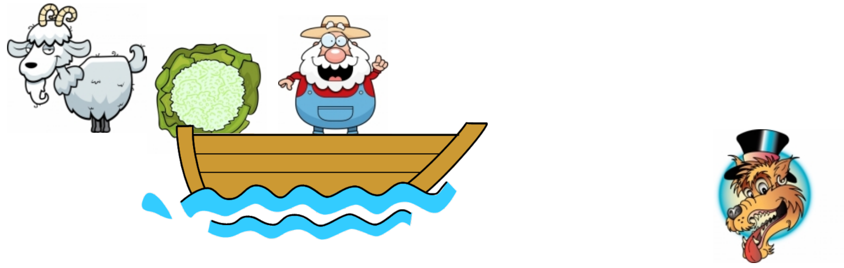
解答例



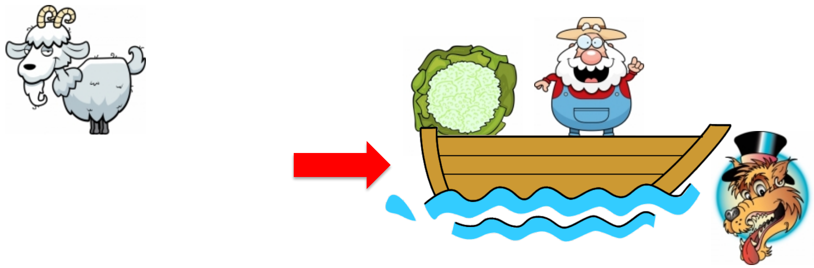
解答例



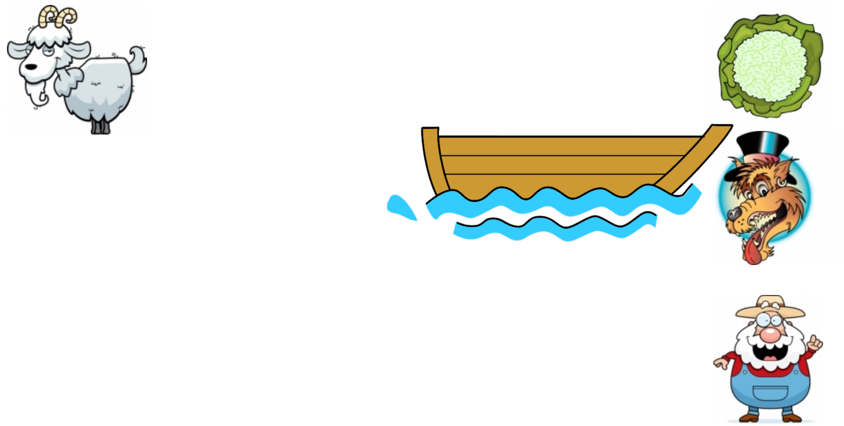
解答例



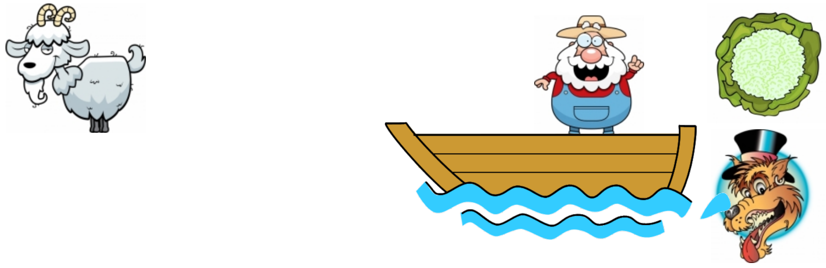
解答例



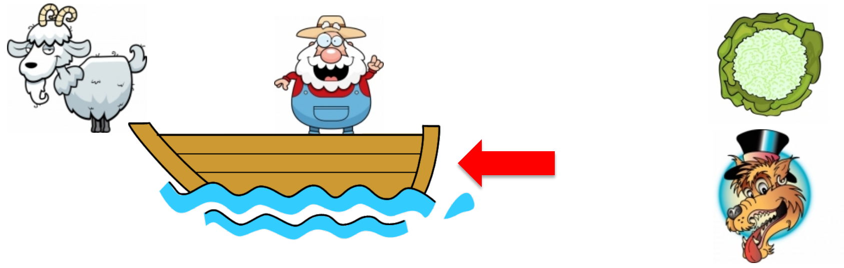
解答例



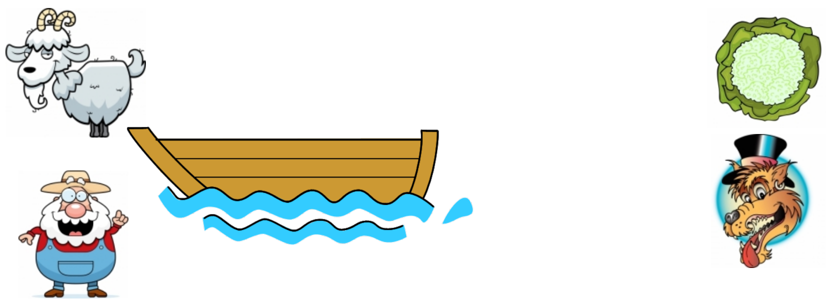
解答例



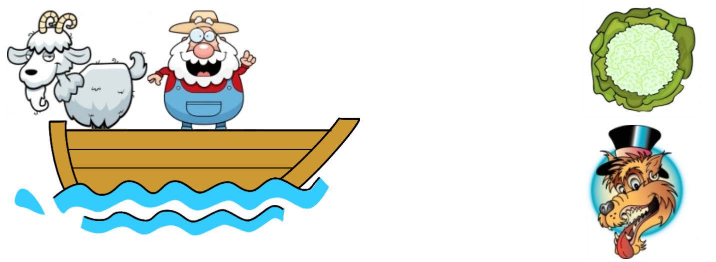
解答例



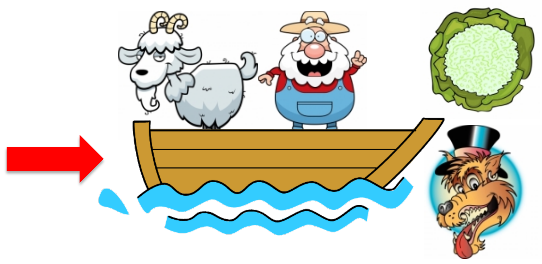
解答例



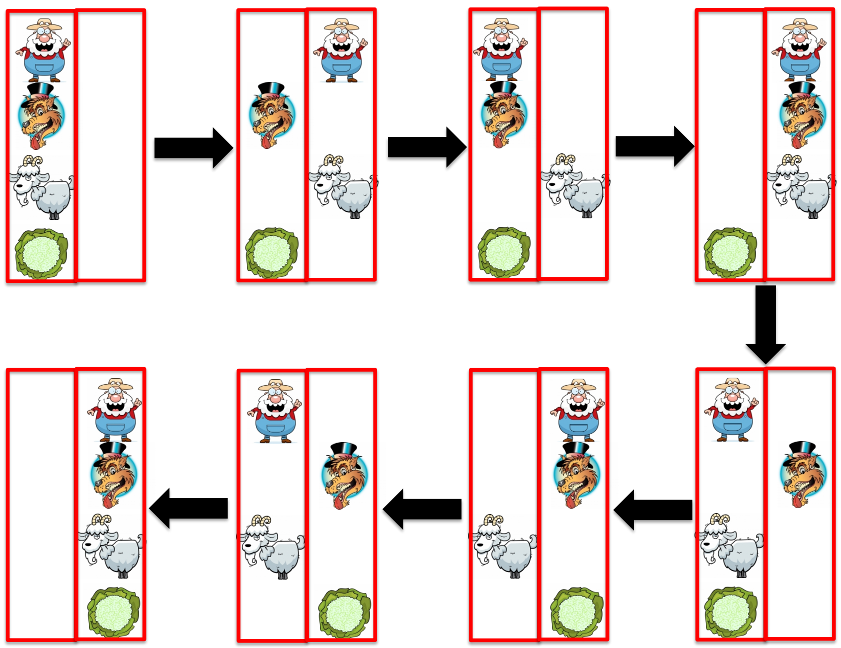
解答例

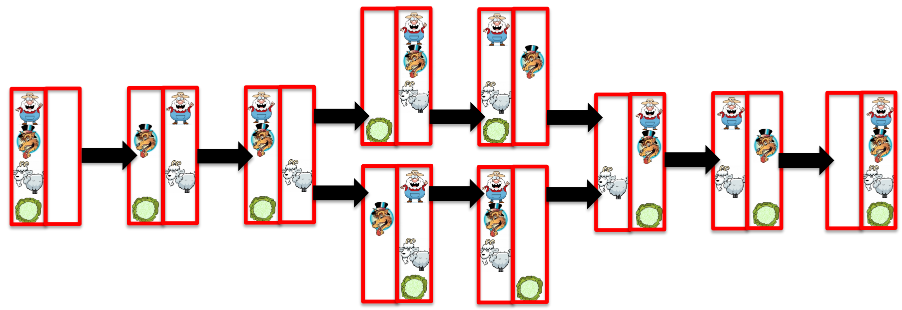


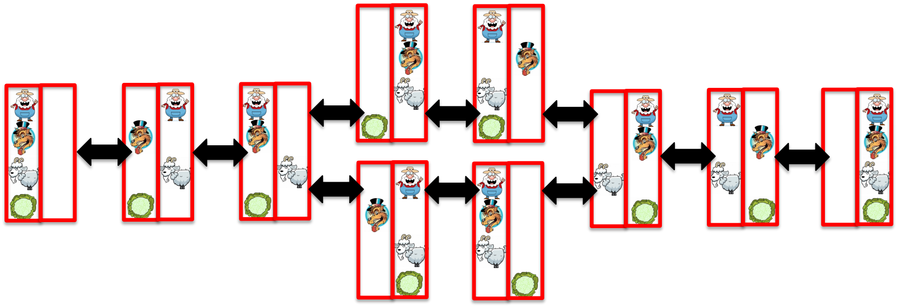
解答例



解答例







10個の状態のあいだを遷移する
有限状態系

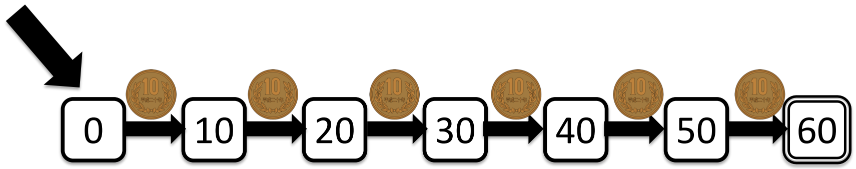
例2

とても旧式の自動販売機

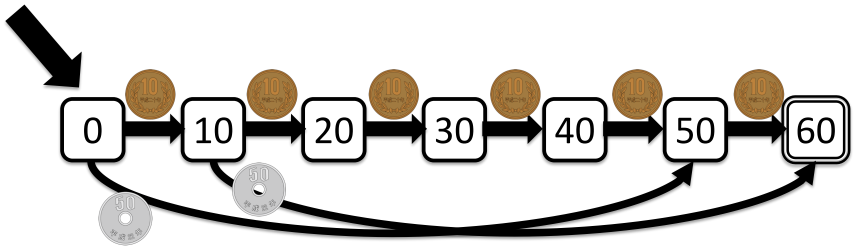
とても旧式の自動販売機

- 1本60円のジュースを売る自動販売機がある。
  - まとめ買いはできない（1度に1本）。
  - 使えるのは10円、50円硬貨のみ。
- 硬貨をいくら分入れたかについて
  有限個の状態を用いて記憶する。
- 60円に到達したら（ボタンを押さなくても）
  自動的に商品を出す。

10円玉だけなら

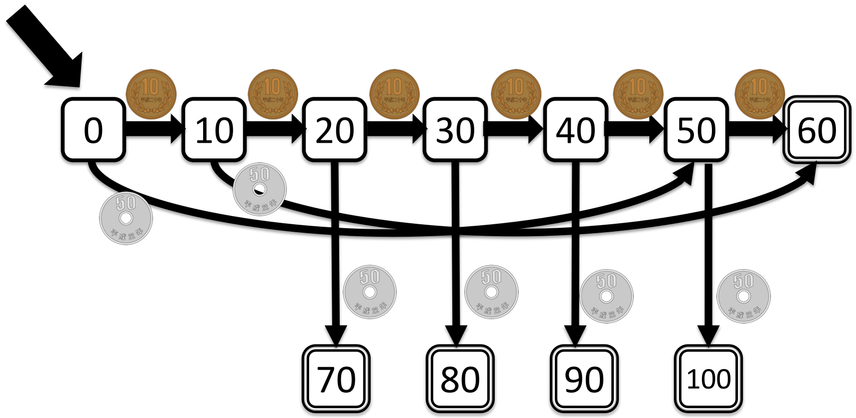


50円玉もゆるすと



これでいいか？

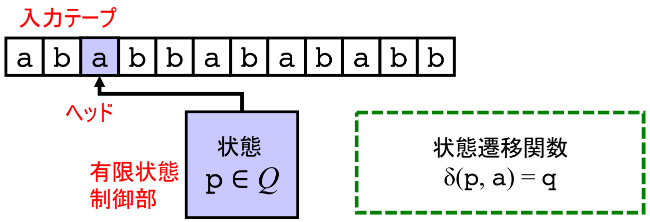
50円玉もゆるすと



有限オートマトンとは（定義）

有限オートマトンは5つ組 $M = (Q, \Sigma, \delta, \ q_0, F)$ である.

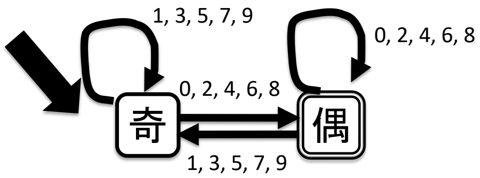
- Q　状態集合（空でない有限集合）
- Σ　アルファベット（空でない有限集合）
- q_0　初期状態（$q_0 \in Q$ ）
- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$　状態遷移関数
- F　受理状態集合（$F \subseteq Q$）



例題1

10進表記された自然数が
2の倍数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

1の位が偶数なら2の倍数



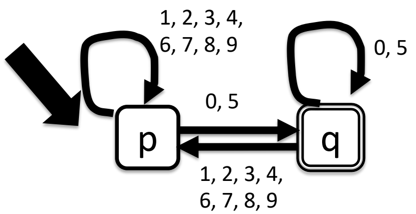
入力: 692

状態遷移: 奇 $\xrightarrow{6}$ 偶 $\xrightarrow{9}$ 奇 $\xrightarrow{2}$ 偶

例題2

10進表記された自然数が
5の倍数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

1の位が0,5なら5の倍数



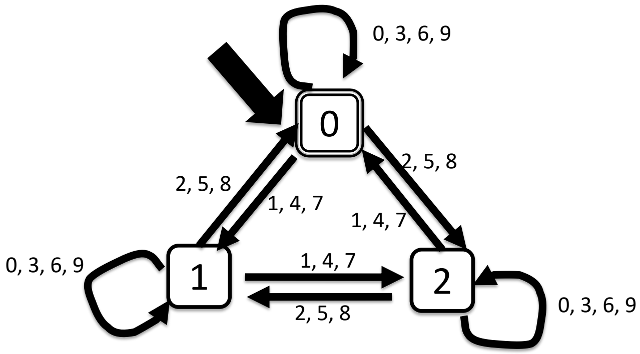
入力: 652

状態遷移: p $\xrightarrow{6}$ p $\xrightarrow{5}$ q $\xrightarrow{2}$ p

例題3

10進表記された自然数が
3の倍数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

各位の数字の和が3の倍数なら3の倍数



入力： 652

状態遷移： $0 \xrightarrow{6} 0 \xrightarrow{5} 2 \xrightarrow{2} 1$

問題1

10進表記された自然数が
4の倍数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

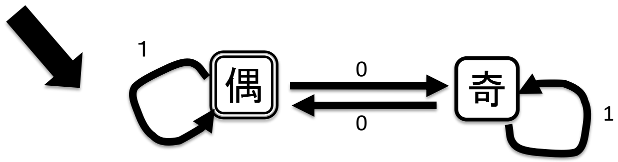
問題2

10進表記された自然数が
9の倍数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

例題4

0,1から成る文字列に対して
0の個数が偶数であるか否かを判定する
有限オートマトンを作れ

0の個数が偶数



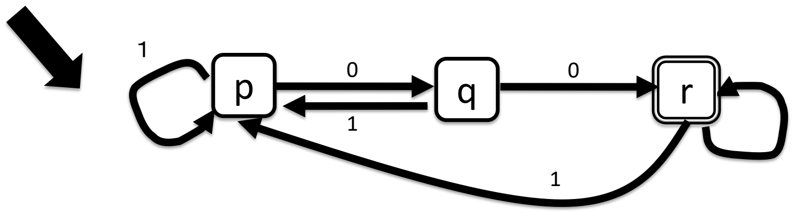
入力： 10110

状態遷移： $\text{偶} \xrightarrow{1} \text{偶} \xrightarrow{0} \text{奇} \xrightarrow{1} \text{奇} \xrightarrow{1} \text{奇} \xrightarrow{0} \text{偶}$

例題5

0,1から成る文字列に対して
文字列の終端が00であるか否かを
判定する有限オートマトンを作れ

終端が00



入力：01000

状態遷移：p $\xrightarrow{0}$ q $\xrightarrow{1}$ p $\xrightarrow{0}$ q $\xrightarrow{0}$ r $\xrightarrow{0}$ r

問題3

0,1から成る文字列に対して
文字列の終端が01であるか否かを
判定する有限オートマトンを作れ

問題4

0,1から成る文字列に対して
文字列の途中に010を含むか否かを
判定する有限オートマトンを作れ

有限オートマトンで判定できないこと

例題1

a,bから成る文字列に対し

$a^n b^m$ (n>0 かつ m>0)

の形をしているか否かを判定する有限オートマトンを作れ.

例題2

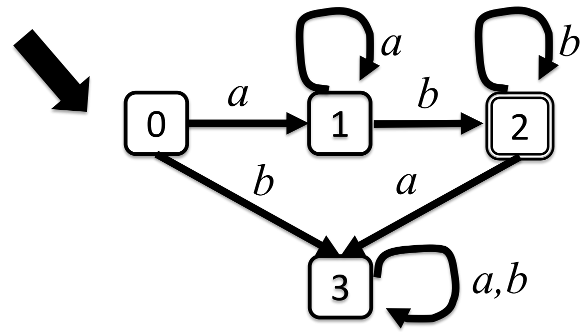
a,bから成る文字列に対し

$a^n b^n$ (n>0)

の形をしているか否かを判定する有限オートマトンを作れ.

例題1 $a^n b^m$ (n>0, m>0)の形式

- 以下の有限オートマトンによって判定できる.

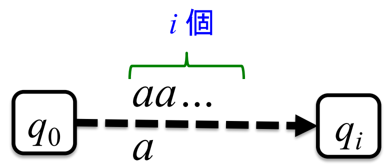


例題2 $a^n b^n$ (n>0)の形式

- この判定を行う有限オートマトンは存在しない.
- そのことを，背理法で証明しよう.

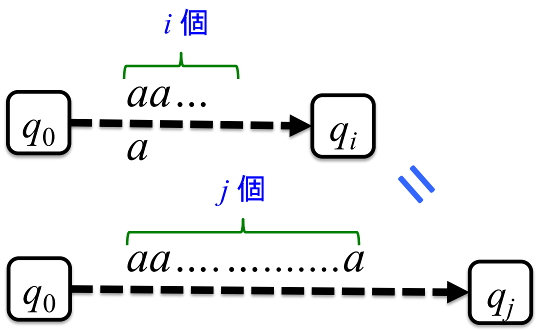
例題2 $a^n b^n$ (n>0)の形式

- 判定を行う有限オートマトンが存在すると仮定し，その状態数を k とする.
- 各 i=0, 1, 2,…, k に対して，初期状態から文字列 a^i を読んで到達する状態を q_i で表す.



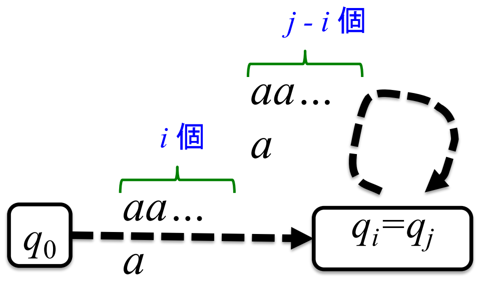
例題2　$a^n b^n$ $(n>0)$の形式

- $k+1$個の状態 $q_0, q_1, \ldots, q_k$ のうちには同じものがあるはず．
- つまり $q_i = q_j$ となる整数 i, j $(0 \le i < j \le k)$ が存在．



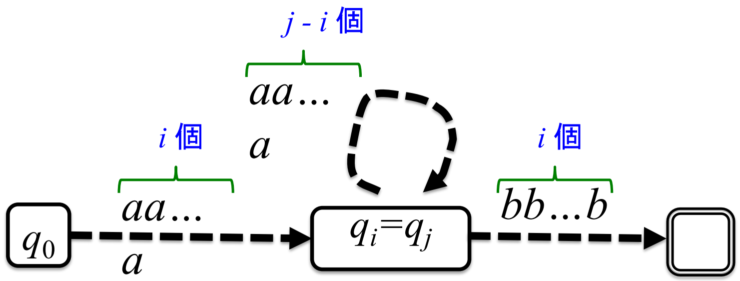
例題2　$a^n b^n$ $(n>0)$の形式

- $k+1$個の状態 $q_0, q_1, \ldots, q_k$ のうちには同じものがあるはず．
- つまり $q_i = q_j$ となる整数 i, j $(0 \le i < j \le k)$ が存在．



例題2　$a^n b^n$ $(n>0)$の形式

- $a^i b^i$ は OKであるため，初期状態から $a^i b^i$ を読んで到達する状態は受理状態.
- このとき，初期状態から文字列 $a^j b^i$ を読むと同じ受理状態へ到達する．これは矛盾．



証明に使ったテクニック

鳩の巣原理 (pigeon hole lemma)
x 羽の鳩が y 個の巣にいるとする．このとき，
$x > y$ ならば，少なくとも一つの巣には
2 羽以上の鳩がいる．