講義後加筆・修正版

Kyushu University 100th 2011
知の新世紀を拓く

形式言語理論
Formal Language Theory

8.　DFAの最小化

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

本日の内容

- DFAの既約性と最小性
- DFAの状態等価性判定
- DFA最小化問題
- k-同値性の性質

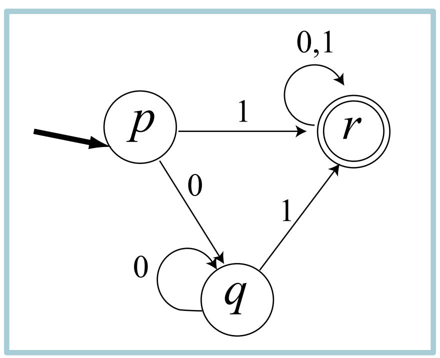
DFAの既約性と最小性

状態集合 Q 上の同値関係

【定義】 DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$に対し状態集合 Q 上の同値関係 $\equiv$ を次で定義する.

$$p \equiv q$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall x \in \Sigma^*,\ (\delta(p,x)\in F \leftrightarrow \delta(q,x)\in F)$$

例



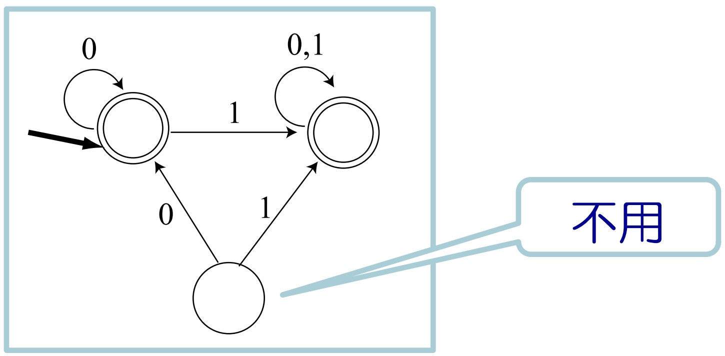
$p \equiv q$

$p \not\equiv r$

$q \not\equiv r$

DFAの既約性と最小性

【定義】 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ において，$p \in Q$ が**不用**であるとは，q_0 から到達不可能であるときをいう．



【定義】 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ が**既約**であるとは，M が不用な状態を含まず，かつ，すべての $p, q \in Q$ に対し $p \equiv q \Rightarrow p = q$ が成り立つときをいう．既約でない DFA を**可約**であるという．

既約なDFAは状態数最小である

【補題3.6】 任意の DFA M に対し $L(M) = L(M')$ となる既約な DFA M' が存在する.

【補題3.7】 M が既約ならば M はそれと等価な DFA のうちで状態数最小である.

補題3.6の証明（1／2）

- Q上の同値関係 $\equiv$ を用いて DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$を次で定める.
  - $Q' = \{ [q]_\equiv \mid q \in Q \}$.
  - $q_0' = [q_0]_\equiv$.
  - $F' = \{ [q]_\equiv \mid q \in F \}$.
  - $\delta'([q]_\equiv, a) = [\delta(q, a)]_\equiv \quad (\forall [q]_\equiv \in Q', \forall a \in \Sigma)$.

δ'の値は，代表元の取り方によらず一意に定まる（要証明）．

補題3.6の証明（２／２）

- 任意の $q \in Q$ に対して次が成り立つ（要証明）．
  - $\forall x \in \Sigma^*, \delta'([q]_\equiv, x) = [\delta(q, x)]_\equiv$.
- M'の状態 $[p]_\equiv$ と $[q]_\equiv$ が同値であると仮定すると,

$$\delta'([p]_\equiv, x) \in F' \leftrightarrow \delta'([q]_\equiv, x) \in F' \quad (\forall x \in \Sigma^*)$$
$$\Rightarrow [\delta(p, x)]_\equiv \in F' \leftrightarrow [\delta(q, x)]_\equiv \in F' \quad (\forall x \in \Sigma^*)$$
$$\Rightarrow \delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F \quad (\forall x \in \Sigma^*)$$
$$\Rightarrow p \equiv q$$
$$\Rightarrow [p]_\equiv = [q]_\equiv$$

- すなわち, M' は既約である.

QED

補題3.7の証明（1／2）

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を既約な DFA とし，
  $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ を $L(M)=L(M')$ となる任意の DFA とする.
- 一般性を失わずに，Q'のすべての状態は q_0' から到達可能と仮定してよい.
- $n = |Q| > |Q'|$ と仮定する.
- $Q = \{p_1, \ldots, p_n\}$とする．各 $i = 1, \ldots, n$ に対し
  $p_i = \delta(q_0, x_i)$ となる文字列 $x_i \in \Sigma^*$ を選ぶ.
- $s_i = \delta'(q_0', x_i)$ とおくと鳩の巣原理より，
  整数 i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ が存在して $s_i = s_j$となる.

補題3.7の証明（２／２）

- このとき，

$$
\begin{aligned}
&\delta'(s_i, x) \in F' \leftrightarrow \delta'(s_j, x) \in F' && (\forall x \in \Sigma^*)\\
\Rightarrow\ &\delta'(q_0', x_i x) \in F' \leftrightarrow \delta'(q_0', x_j x) \in F' && (\forall x \in \Sigma^*)\\
\Rightarrow\ &\delta(q_0, x_i x) \in F \leftrightarrow \delta(q_0, x_j x) \in F && (\forall x \in \Sigma^*)\\
\Rightarrow\ &\delta(p_i, x) \in F \leftrightarrow \delta(p_j, x) \in F && (\forall x \in \Sigma^*)
\end{aligned}
$$

  となるから，p_i と p_j は同値である．
- これは M が既約であることに矛盾する．
- よって，背理法により，$|Q| \leq |Q'|$.

QED

DFAの状態等価性判定

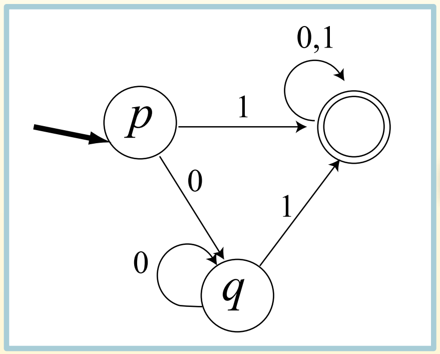
DFAの状態等価性判定

DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
と状態 $p, q \in Q$.

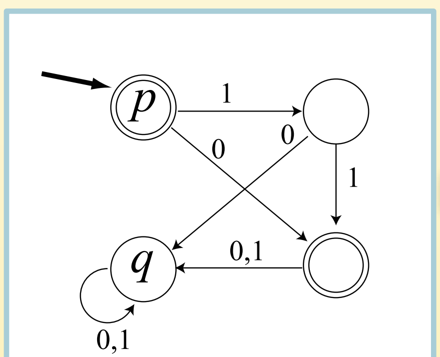
入力 → ? → 出力

$p \equiv q$ ならば Yes,
そうでなければ No.

例



→ ? → Yes



→ ? → No

DFA状態等価性判定

【定義】（DFA状態等価性判定）.
入力: DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ と状態 $p, q \in Q$.
出力: $p \equiv q$ ならば Yes，そうでなければ No.

【定理3.12】 DFA状態等価性判定問題を解くアルゴリズムが存在する.

DFAの状態等価性を判定するには？

- 同値関係 $\equiv$ の定義は,
  $p \equiv q \Leftrightarrow \forall x \in \Sigma^*,\ (\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F\ )$
  である.
- だが, $\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F$ であるか否かのチェックを無限個の $x \in \Sigma^*$ に対して行うことはできない.
- では, どうやって判定すればいいだろうか？

k-同値性

【定義】 任意の$k = 0,1,\ldots$ に対し，$\Sigma^{(k)} = \{x \in \Sigma^* \mid |x| \le k\}$ とおく．DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し Q 上の同値関係 $\equiv^k$ を次で定義する．

$$p \equiv^k q$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \Sigma^{(k)},\ (\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F)$$

【補題3.8】 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し，$n = |Q|$ とおくと，$\equiv^n = \equiv$ が成り立つ．

証明は一番最後に…

定理3.12の証明

- DFA M の状態数を $n=|Q|$とおくと，補題3.8により，

$$
\begin{aligned}
& p \equiv q \\
\Leftrightarrow\ & p \equiv^{n} q \\
\Leftrightarrow\ & \delta(p,x) \in F \leftrightarrow \delta(q,x) \in F \quad (\forall x \in \Sigma^{(n)})
\end{aligned}
$$

- すなわち，長さ n 以下のすべての x について $\delta(p,x) \in F \leftrightarrow \delta(q,x) \in F$ をチェックすることで $p \equiv q$ を判定できる．

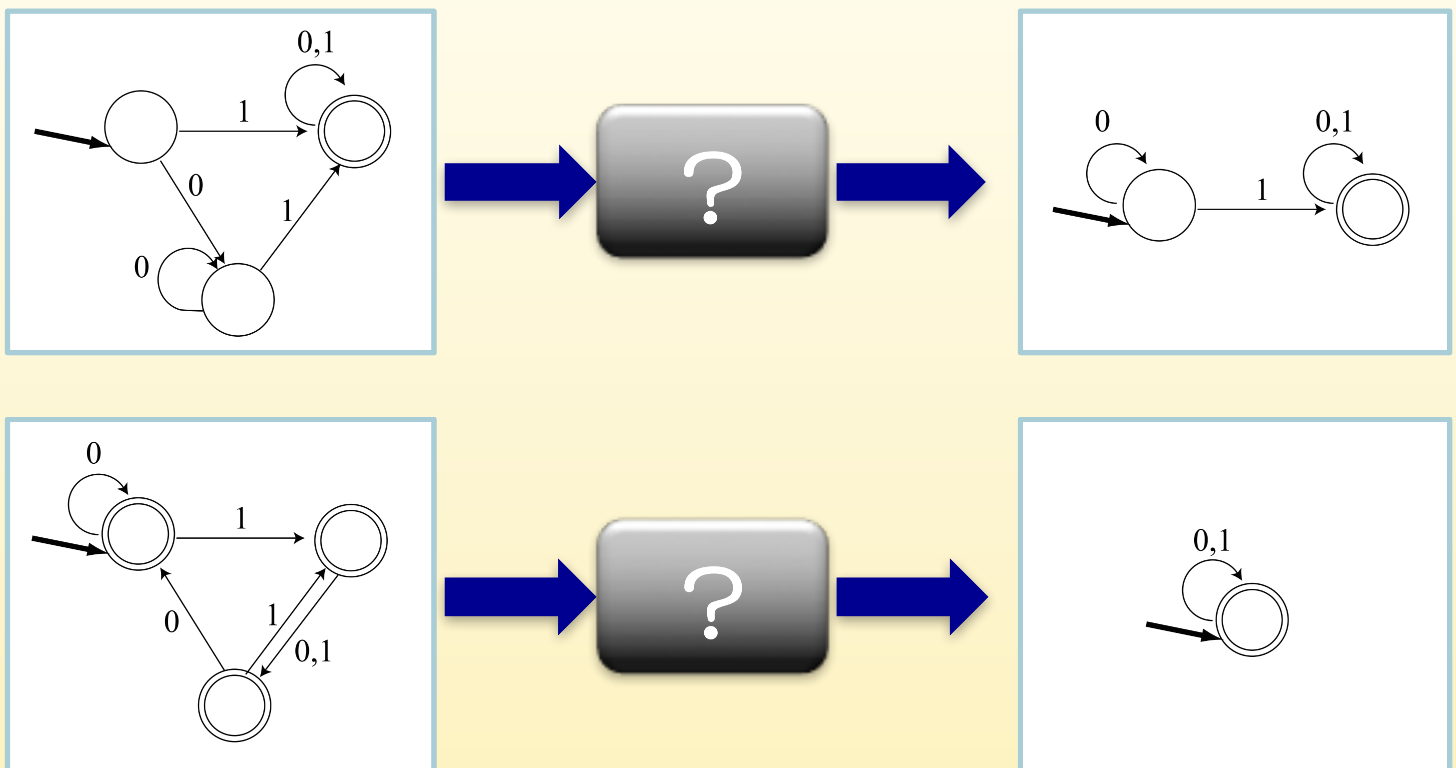
QED

DFA最小化問題

DFA最小化問題

DFA M → 入力 → ? → 出力 → $L(M)=L(M')$となる状態数最小のDFA M'

例



DFA最小化問題

【定義】（DFA最小化問題）.

入力: DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

出力: $L(M)=L(M')$となる状態数最小のDFA M'.

【定理3.13】 DFA最小化問題を解くアルゴリズムが存在する.

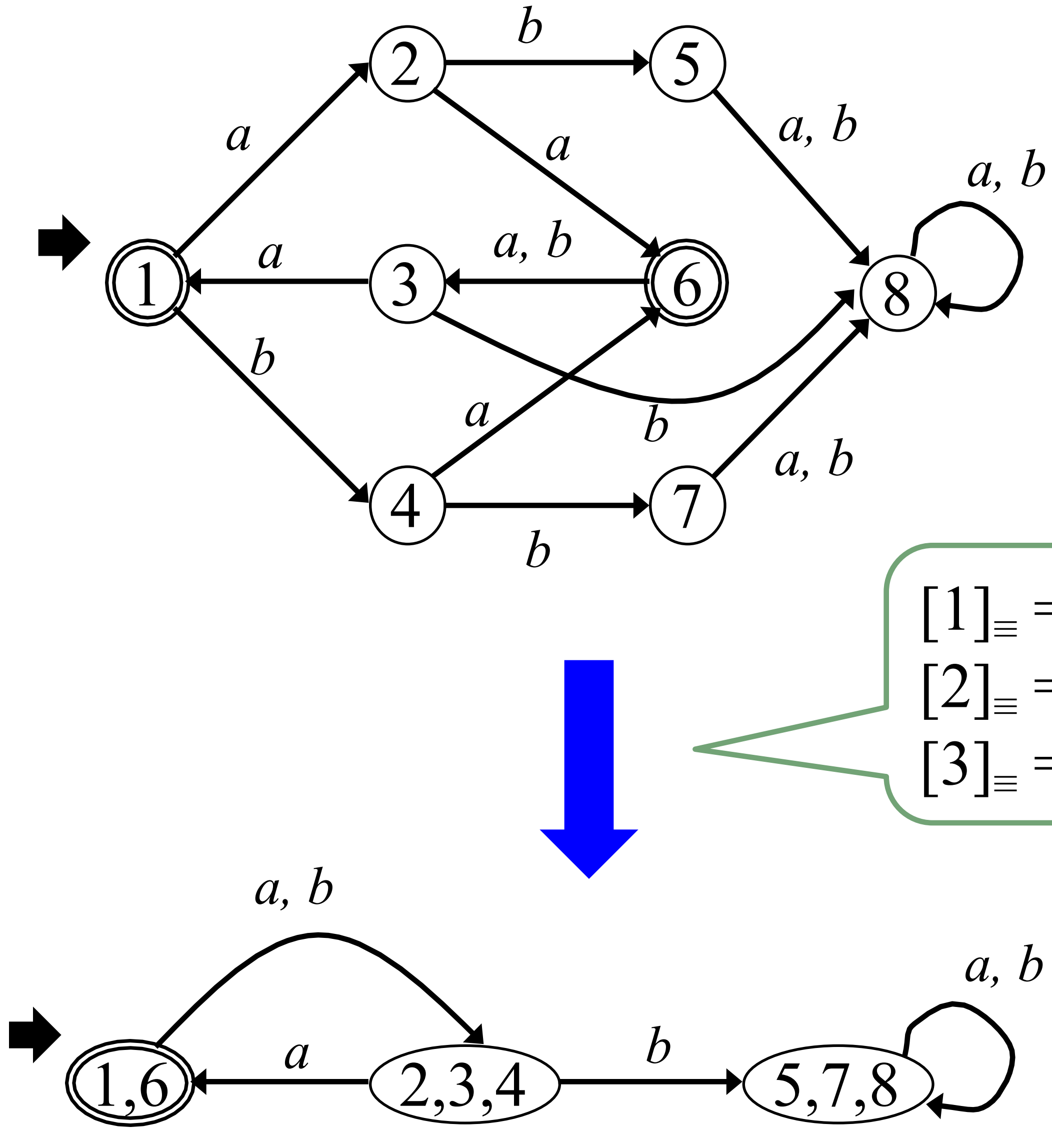
定理3.13の証明

次のアルゴリズムで最小化を行うことができる.

1. DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$に対し Q 上の同値関係 $\equiv$ による同値類を求める.
2. 次を満たすDFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$を構成する.
   a. $Q' = \{ [q]_\equiv \mid q \in Q \}$.
   b. $q_0' = [q_0]_\equiv$.
   c. $F' = \{ [q]_\equiv \mid q \in F \}$.
   d. $\delta'([q]_\equiv, a) = [\delta(q, a)]_\equiv \quad (\forall [q]_\equiv \in Q', \forall a \in \Sigma)$.

QED

例



$[1]_{\equiv} = \{1, 6\}$
$[2]_{\equiv} = \{2, 3, 4\}$
$[3]_{\equiv} = \{5, 7, 8\}$

補題3.8の証明

k-同値性の性質

補題3.8の証明がまだ...

再掲【補題3.8】 DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し,
$n = |Q|$ とおくと, $\equiv^n = \equiv$ が成り立つ.

- 補題3.8の証明を与えるために,
  k-同値性の性質について論じる.

k-同値性の性質

- $\equiv^k$ の定義

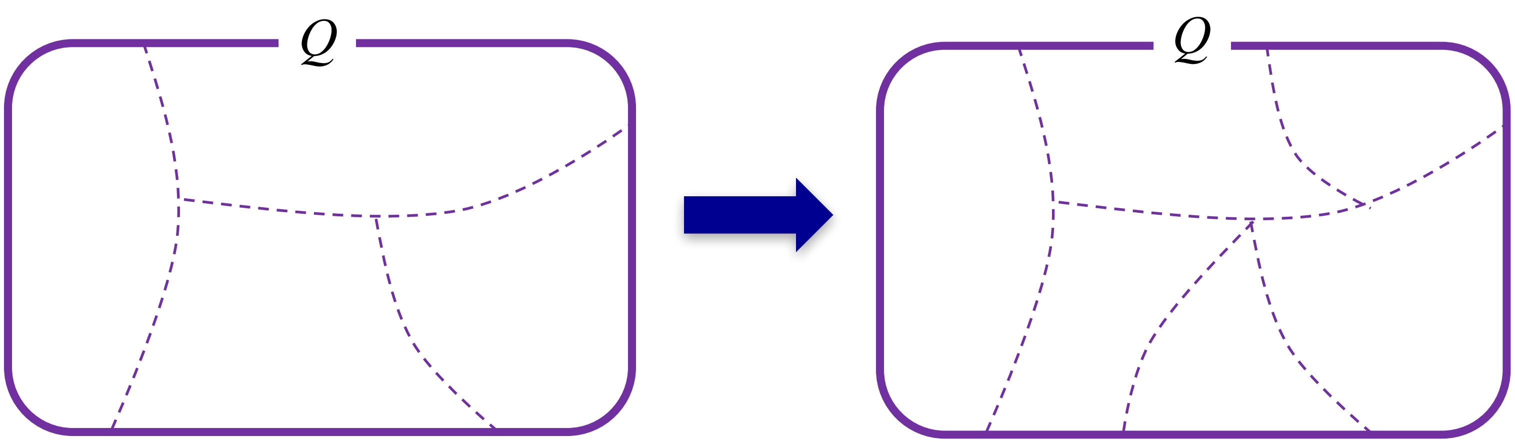
  $$p \equiv^k q \;\Leftrightarrow\; \forall x \in \Sigma^{(k)},\; (\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F\,)$$

  より，$p \equiv^{k+1} q \Rightarrow p \equiv^k q$ である．
- $\equiv^{k+1} \subseteq \equiv^k$，すなわち，$\equiv^{k+1}$ は $\equiv^k$ の細分 である．
- 同様に，$\equiv$ は $\equiv^k$ の細分 である．
- 次の命題を得る．

【命題】 同値関係の系列 $\equiv^1, \equiv^2, \ldots$ は集合の包含関係に関して単調減少であり，各 $\equiv^k$ は $\equiv$ を包含する．すなわち，$\equiv^1 \supseteq \equiv^2 \supseteq \cdots \supseteq \equiv^k \supseteq \cdots \supseteq \equiv$ である．

補足　$\equiv^k \supseteq \equiv^{k+1}$ に関するイメージ図

$\equiv^k$ による同値類　　　　$\equiv^{k+1}$ による同値類



1つの部屋（同値類）が，1つ以上に分割される

- $\equiv^k \supsetneq \equiv^{k+1}$ なら同値類の個数が最低1つ増える．
- 状態数は有限だから，これを繰り返していくと，いつかは同値類の個数が増えなくなるはず．

k-同値性に関する性質

- 補題3.8を強めた以下の補題が成り立つ.

【補題3.9】 DFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し，ある $n \leq |Q|$ が存在して次が成り立つ.

$$\equiv^1 \supsetneq \equiv^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \equiv^n = \equiv^{n+1} = \equiv^{n+2} = \cdots$$

この n について $\equiv^n = \equiv$ である.

補題3.9の証明

- 次を示すことによって証明する.

① $p \equiv^{k+1} q \Leftrightarrow p \equiv^{k} q \wedge \delta(p, a) \equiv^{k} \delta(q, a)\ (\forall a \in \Sigma)$

② $\equiv^{k} = \equiv^{k+1} \Rightarrow \forall m \geq k,\ \equiv^{k} = \equiv^{m}$

③ $\equiv^{k} = \equiv^{k+1} \Rightarrow \equiv^{k} = \equiv$

④ 正整数 $n \leq |Q|$ が存在して$\equiv^{n} = \equiv^{n+1}$

補題3.9の証明：①の証明

- $(\Leftarrow)$ $p \equiv^k q \wedge \delta(p, a) \equiv^k \delta(q, a)$ $(\forall a \in \Sigma)$ とする.
  - $$\begin{aligned} & \delta(p, a) \equiv^k \delta(q, a) && (\forall a \in \Sigma) \\ \Rightarrow\ & \delta(\delta(p, a), x) \in F \leftrightarrow \delta(\delta(q, a), x) \in F && (\forall a \in \Sigma,\ \forall x \in \Sigma^{(k)}) \\ \Rightarrow\ & \delta(p, ax) \in F \leftrightarrow \delta(q, ax) \in F && (\forall a \in \Sigma,\ \forall x \in \Sigma^{(k)}) \\ \Rightarrow\ & \delta(p, w) \in F \leftrightarrow \delta(q, w) \in F && (\forall w \in \Sigma^{(k+1)}) \end{aligned}$$
  - よって，$p \equiv^{k+1} q$.
- $(\Rightarrow)$ $p \equiv^{k+1} q$とする． $p \equiv^k q$ は自明.
  - $$\begin{aligned} & \delta(p, ax) \in F \leftrightarrow \delta(q, ax) \in F && (\forall a \in \Sigma,\ \forall x \in \Sigma^{(k)}) \\ \Rightarrow\ & \delta(\delta(p, a), x) \in F \leftrightarrow \delta(\delta(q, a), x) \in F && (\forall a \in \Sigma,\ \forall x \in \Sigma^{(k)}) \\ \Rightarrow\ & \delta(p, a) \equiv^k \delta(q, a) && (\forall a \in \Sigma) \end{aligned}$$

QED

補題3.9の証明：②の証明

- $\equiv^k = \equiv^{k+1}$ を仮定すると

$$
\begin{aligned}
& p \equiv^{k+1} q \\
\Leftrightarrow\ & p \equiv^k q \wedge \delta(p, a) \equiv^k \delta(q, a)\ (\forall a \in \Sigma) && [\because ①] \\
\Leftrightarrow\ & p \equiv^{k+1} q \wedge \delta(p, a) \equiv^{k+1} \delta(q, a)\ (\forall a \in \Sigma) \\
\Leftrightarrow\ & p \equiv^{k+2} q && [\because ①]
\end{aligned}
$$

- すなわち，$\equiv^k = \equiv^{k+1} \Rightarrow \equiv^{k+1} = \equiv^{k+2}$ である.
- これから,

$$\equiv^k = \equiv^{k+1} \Rightarrow \equiv^k = \equiv^m \quad (\forall m \geq k)$$

を得る.

QED

補題3.9の証明：③の証明

- $\equiv^k = \equiv^{k+1}$を仮定する.
- ②より，すべての $m \geq k$ に対して $\equiv^k = \equiv^m$.
- $\equiv^k \supseteq \equiv$ であるから，$\equiv^k \subseteq \equiv$ を示せばよい.
- $$p \equiv^k q$$
  $$\Rightarrow \forall m \geq k,\ p \equiv^m q$$
  $$\Rightarrow \forall\ m \geq k,\ \forall x \in \Sigma^{(m)},\ (\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F)$$
  $$\Rightarrow \forall x \in \Sigma^*,\ (\delta(p, x) \in F \leftrightarrow \delta(q, x) \in F)\ [\because \cup_{m \geq k} \Sigma^{(m)} = \Sigma^*]$$
  $$\Rightarrow p \equiv q$$

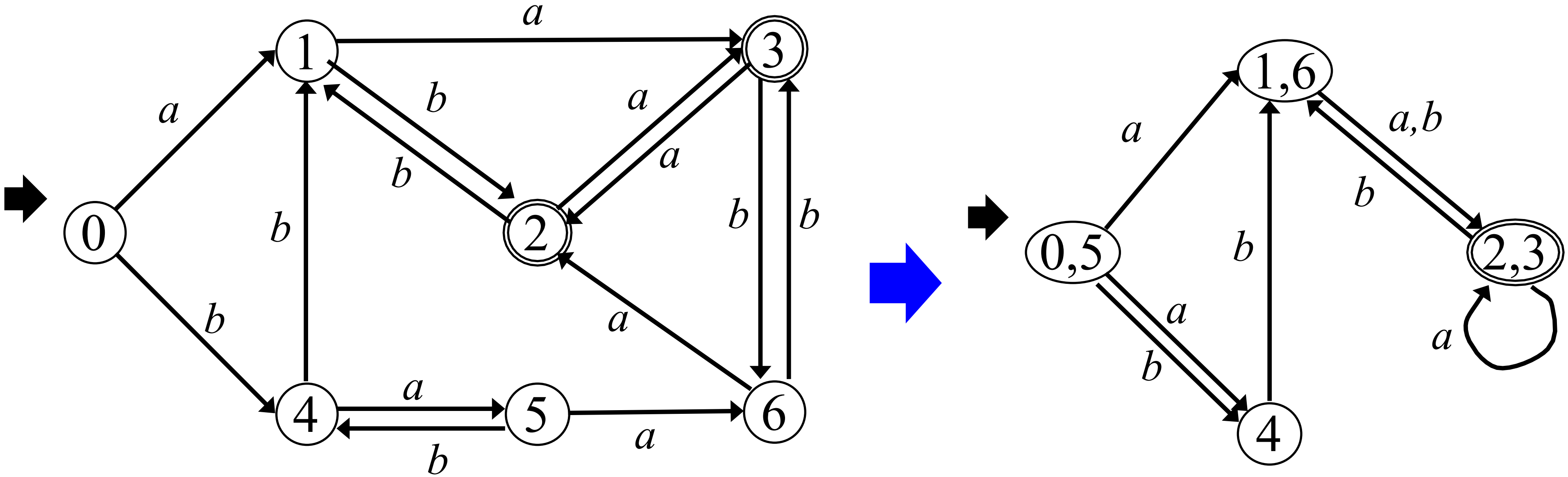
QED

補題3.9の証明：④の証明

- 無限の系列 $\equiv^1 \supseteq \equiv^2 \supseteq \cdots \supseteq \cdots$ において，
  $\equiv^k \supsetneq \equiv^{k+1}$ なら $|Q/\equiv^k| < |Q/\equiv^{k+1}|$であり，
  同値類の個数は$|Q|$を超えない．
- したがって，ある正整数nが存在して
  $$\equiv^n = \equiv^{n+1} = \equiv^{n+2} = \cdots$$
  でなければならない．
- そのような最小の n を選ぶ．
- ②より，$\equiv^1 \supsetneq \equiv^2 \supsetneq \cdots \supsetneq \equiv^n = \equiv^{n+1}$となる．
- よって，$1 \leq |Q/\equiv^1| < |Q/\equiv^2| < \cdots < |Q/\equiv^n| \leq |Q|$
  となり，$n \leq |Q|$ である．

QED

例



$$[0]_{\equiv_1} = \{0, 4, 5\}$$
$$[1]_{\equiv_1} = \{1, 6\}$$
$$[2]_{\equiv_1} = \{2, 3\}$$

$$[0]_{\equiv_2} = \{0, 5\}$$
$$[1]_{\equiv_2} = \{1, 6\}$$
$$[2]_{\equiv_2} = \{2, 3\}$$
$$[4]_{\equiv_2} = \{4\}$$

$$[0]_{\equiv_3} = \{0, 5\}$$
$$[1]_{\equiv_3} = \{1, 6\}$$
$$[2]_{\equiv_3} = \{2, 3\}$$
$$[4]_{\equiv_3} = \{4\}$$

$$[0]_{\equiv} = \{0, 5\}$$
$$[1]_{\equiv} = \{1, 6\}$$
$$[2]_{\equiv} = \{2, 3\}$$
$$[4]_{\equiv} = \{4\}$$

$$\equiv^1 \supsetneq \equiv^2 = \equiv^3 = \equiv^4 = \cdots$$