KYUSHU UNIVERSITY 100th 2011
知の新世紀を拓く

形式言語理論

Formal Language Theory

4. 出力付き有限オートマトン

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

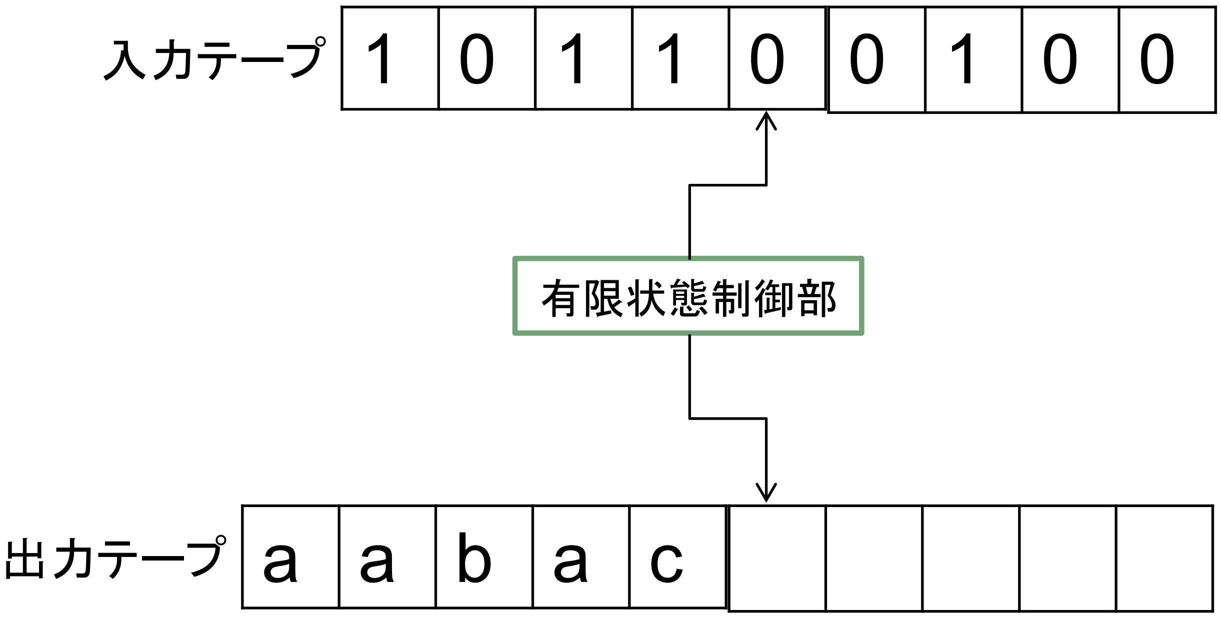
本日の内容

- Mealy型順序機械（Mealy機械）
- 一般化順序機械
- Moore型順序機械（Moore機械）
  - Moore機械とMealy機械の等価性

Mealy型順序機械

順序機械とは？

- 出力テープをもつ決定性有限オートマトン.

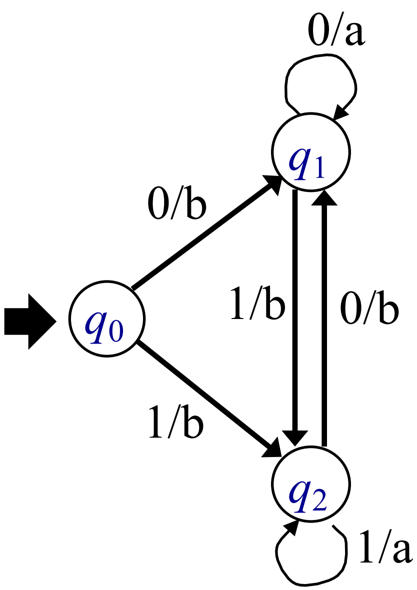


Mealy型順序機械 (Mealy-type Sequential Machine)

【定義】Mealy型順序機械(Mealy機械)とは，次のような6つ組 M=(Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0) をいう.

- Q は状態の空でない有限集合.
- Σ は記号の空でない有限集合で，入力アルファベットと呼ばれる.
- Δ は記号の空でない有限集合で，出力アルファベットと呼ばれる.
- δ: $Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は状態遷移関数.
- λ: $Q \times \Sigma \rightarrow \Delta$ は出力関数.
- $q_0 \in Q$ は開始状態.

例



状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
入力アルファベット	$\{ 0, 1 \}$
出力アルファベット	{ a, b }
状態遷移関数	（右表のとおり）
出力関数	（右下表のとおり）
初期状態	q_0

状態遷移関数 δ

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

出力関数 λ

	0	1
q_0	b	b
q_1	a	b
q_2	b	a

Mealy機械による文字列の変換

【定義】Mealy機械 $M=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$に対して，関数 $S_M : \Sigma^* \to \Delta^*$ を次のように定める．

(1) $S_M(\varepsilon) = \varepsilon$.

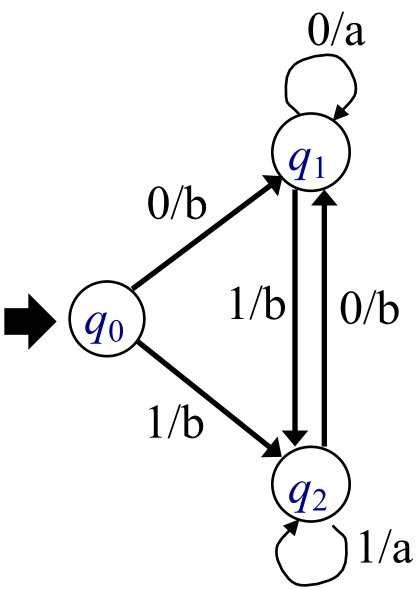
(2) 任意の $x \in \Sigma^+$ に対して

$$S_M(x) = S_M(w)\,\lambda(\delta(q_0, w), a).$$

ここに，$x = wa$，$w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ とする．

$|S_M(x)| = |x|$ が成り立つ．

例



入力01100に対する動作例

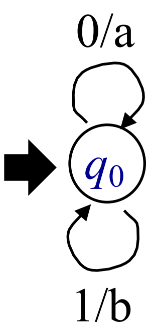
$$q_0 \xrightarrow[b]{0} q_1 \xrightarrow[b]{1} q_2 \xrightarrow[a]{1} q_2 \xrightarrow[b]{0} q_1 \xrightarrow[a]{0} q_1$$

$$S_M(01100) = \mathrm{bbaba}$$

直前と同じ文字ならa
そうでなければb
を出力するMealy機械

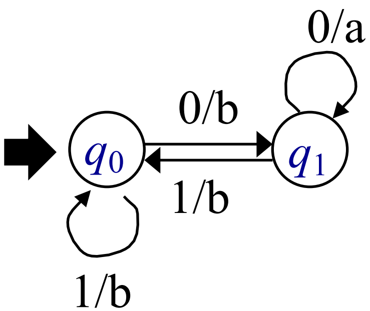
例題1

【例題1】 $\Sigma=\{0,1\}$, $\Delta=\{a,b\}$とする．入力文字列において 0 を a に，1 を b に置き換える Mealy機械 M を与えよ．
例えば，$S_M(01101)$=abbabである．



例題2

【例題2】 $\Sigma=\{0,1\}$, $\Delta=\{a,b\}$とする．入力文字列において，
0 に後続する 0 は a に，そうでない 0 は b に置き換え，
1 は b に置換するMealy機械 M を与えよ．
例えば，$S_M(010001)=\text{bbbaab}$である．



演習問題

【演習問題2.1】 $\Sigma=\{0,1\}$, $\Delta=\{a,b\}$とする．入力文字列において，0 が2個以上連続した直後に1を読んだら b を，それ以外は a を出力するMealy機械Mを与えよ．

例えば，$S_M(001011)$=aabaaaである．

演習問題

【演習問題2.2】 $\Sigma=\Delta=\{0,1\}$とする．入力文字列を1文字分遅れて出力するMealy機械Mを与えよ．ただし，入力の先頭文字を読んだ際には0を出力するものとする．
例えば，$S_M(011011)=0\,01101$である．

Mealy型順序機械の拡張

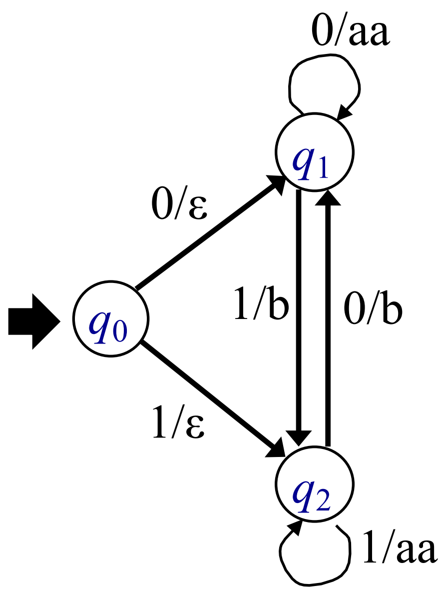
一般化順序機械

一般化順序機械 (Generalized Sequential Machine)

【定義】一般化順序機械とは，次のような6つ組
$M=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ をいう.

- Q は状態の空でない有限集合.
- Σ は記号の空でない有限集合で，入力アルファベットと呼ばれる.
- Δ は記号の空でない有限集合で，出力アルファベットと呼ばれる.
- $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ は状態遷移関数.
- $\lambda: Q \times \Sigma \to \Delta^*$ は出力関数.
- $q_0 \in Q$ は開始状態.

例



状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
入力アルファベット	{ 0, 1 }
出力アルファベット	{ a, b }
状態遷移関数	(右表のとおり)
出力関数	(右下表のとおり)
初期状態	q_0

状態遷移関数 δ

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

出力関数 λ

	0	1
q_0	ε	ε
q_1	aa	b
q_2	b	aa

一般化順序機械による文字列の変換

【定義】一般化順序機械 $M=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$に対して，関数 $S_M : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ を次のように定める．

(1) $S_M(\varepsilon) = \varepsilon.$

(2) 任意の $x \in \Sigma^+$ に対して

$$S_M(x) = S_M(w)\, \lambda(\delta(q_0, w), a)).$$

ここに，$x = wa$，$w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ とする．

$|S_M(x)| = |x|$ が成り立たないことに注意．

演習問題

【演習問題2.3】 $\Sigma=\Delta=\{0,1\}$とする．入力文字列を3文字ずつに区切り，多数決で0または1を出力する一般化順序機械Mを与えよ．
例えば，$S_M(011000010101)=1001$である．

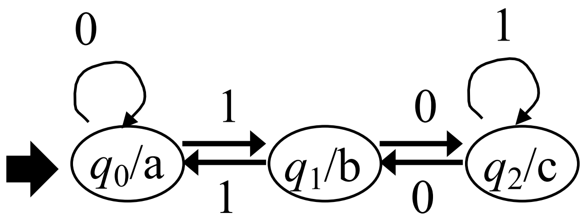
Moore型順序機械

Moore型順序機械 (Moore-type Sequential Machine)

【定義】Moore型順序機械(Moore機械)とは，次のような6つ組 $M=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ をいう.

- Q は状態の空でない有限集合.
- Σ は記号の空でない有限集合で，入力アルファベットと呼ばれる.
- Δ は記号の空でない有限集合で，出力アルファベットと呼ばれる.
- $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow Q$ は状態遷移関数.
- $\lambda: Q\rightarrow\Delta$ は出力関数.
- $q_0\in Q$ は開始状態.

例



状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
入力アルファベット	$\{ 0, 1 \}$
出力アルファベット	{ a, b, c }
状態遷移関数	（右表のとおり）
出力関数	（右下表のとおり）
初期状態	q_0

状態遷移関数 δ

	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_0
q_2	q_1	q_2

出力関数 λ

q_0	a
q_1	b
q_2	c

Moore機械による文字列の変換

【定義】Moore機械 $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$に対して，
関数 $S_M : \Sigma^* \to \Delta^*$ を次のように定める.

(1) $S_M(\varepsilon) = \varepsilon.$

(2) 任意の $x \in \Sigma^+$ に対して

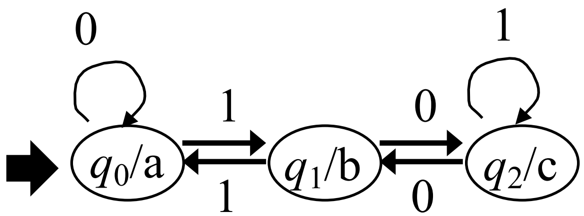
$$S_M(x) = S_M(w)\ \lambda(\delta(q_0, x)).$$

ここに，$x = wa$，$w \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ とする.

$|S_M(x)| = |x|$ が成り立つ.

(1)を以下のように定めた教科書もある.
(1) $S_M(\varepsilon) = \lambda(q_0).$
この場合，常に $|S_M(x)| = |x|+1$ となる.

例



入力1010に対する動作例

$$q_0 \xrightarrow{\;1\;} q_1 \xrightarrow{\;0\;} q_2 \xrightarrow{\;1\;} q_2 \xrightarrow{\;0\;} q_1$$

b　c　c　b

$$S_M(1010) = \mathrm{bccb}$$

Moore機械とMealy機械の等価性

- Moore機械 $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$と Mealy機械 $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q_0')$が **等価**であるとは，すべての $x \in \Sigma^*$ に対して $S_M(x) = S_{M'}(x)$ が成り立つときをいう.

Moore機械とMealy機械の等価性

【定理2.4】任意のMoore機械 M に対しそれと等価なMealy機械 M' が存在する.

【定理2.5】任意のMealy機械 M に対しそれと等価なMoore機械 M' が存在する.

定理2.4の証明

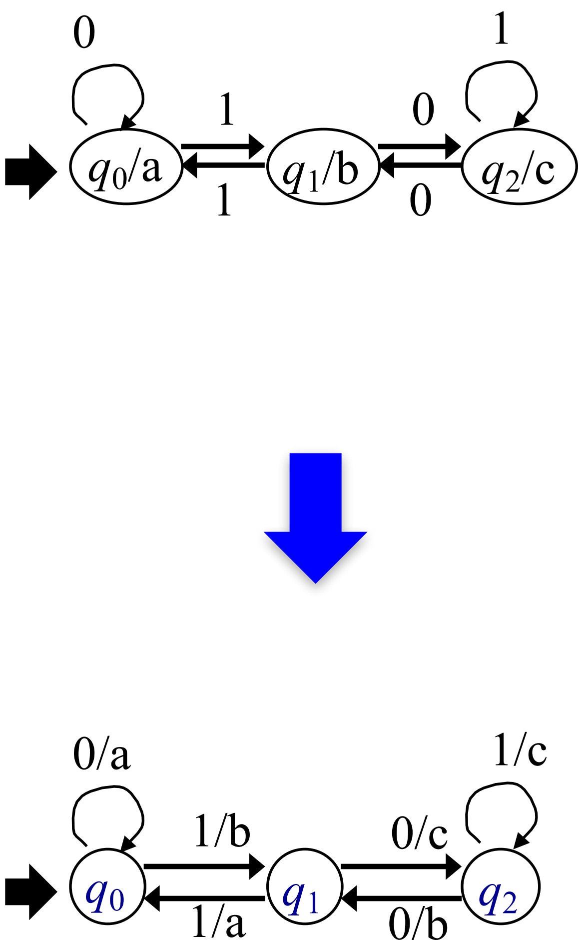
- $M=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$をMoore機械とする.
- 関数 $\lambda': Q\times\Sigma \to \Delta$ を次で定める.

$$\lambda'(q, a) = \lambda(\delta(q, a)) \qquad (q \in Q, a \in \Sigma).$$

- Mealy機械 $M'=(Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda', q_0)$は M と等価である（厳密には数学的帰納法で証明）.

QED

例

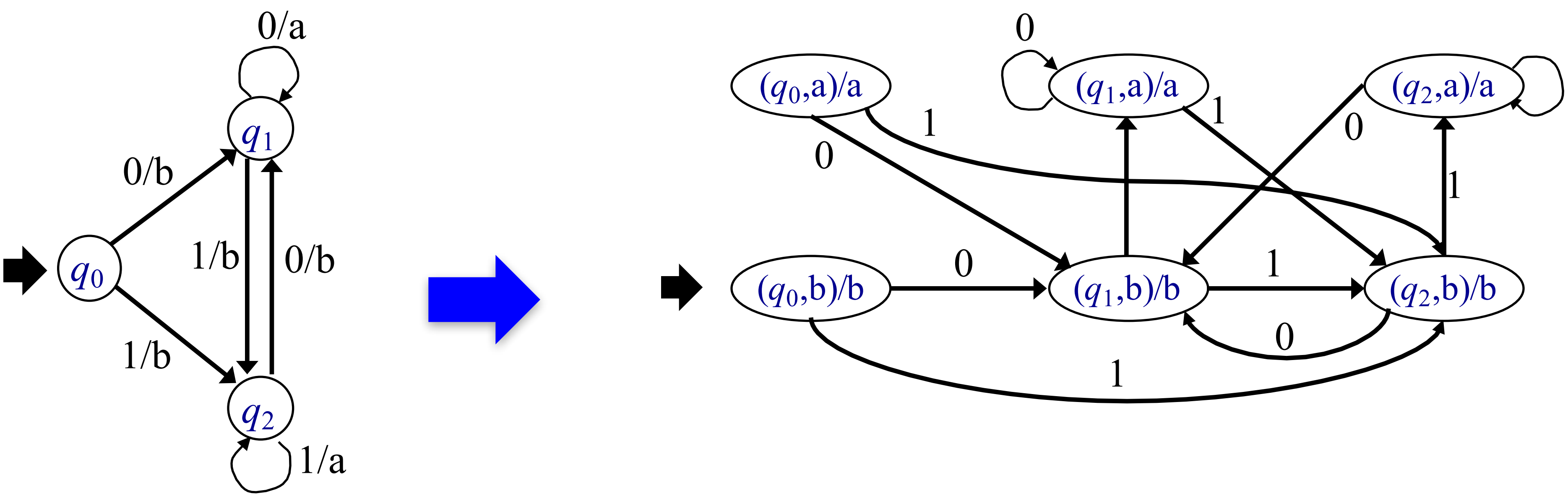


定理2.5の証明

- M=(Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0)をMealy機械とする.
- Moore機械 M'=(Q', Σ, Δ, δ', λ', $q_{0'}$)を次で定める.
  - $Q' = Q \times \Delta$.
  - ある $b_0 \in \Delta$ を選び $q_0' = (q_0, b_0)$ とおく.
  - 任意の$(q, b) \in Q'$と任意の$a \in \Sigma$ に対して
    $\delta'((q, b), a) = (\ \delta(q,a), \lambda(q,a)\ )$
  - 任意の$(q, b) \in Q'$ に対して
    $\lambda'((q, b)) = b$
- M'はMと等価である(厳密には数学的帰納法で証明).

QED

例


0/a
q_1
0/b
1/b
0/b
q_0
1/b
q_2
1/a
0
$(q_0,\mathrm{a})/\mathrm{a}$
$(q_1,\mathrm{a})/\mathrm{a}$
$(q_2,\mathrm{a})/\mathrm{a}$
1
1
1
0
0
1
$(q_0,\mathrm{b})/\mathrm{b}$
0
$(q_1,\mathrm{b})/\mathrm{b}$
1
$(q_2,\mathrm{b})/\mathrm{b}$
0
1