形式言語理論

Formal Language Theory

2. ε-遷移を含む有限オートマトン

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

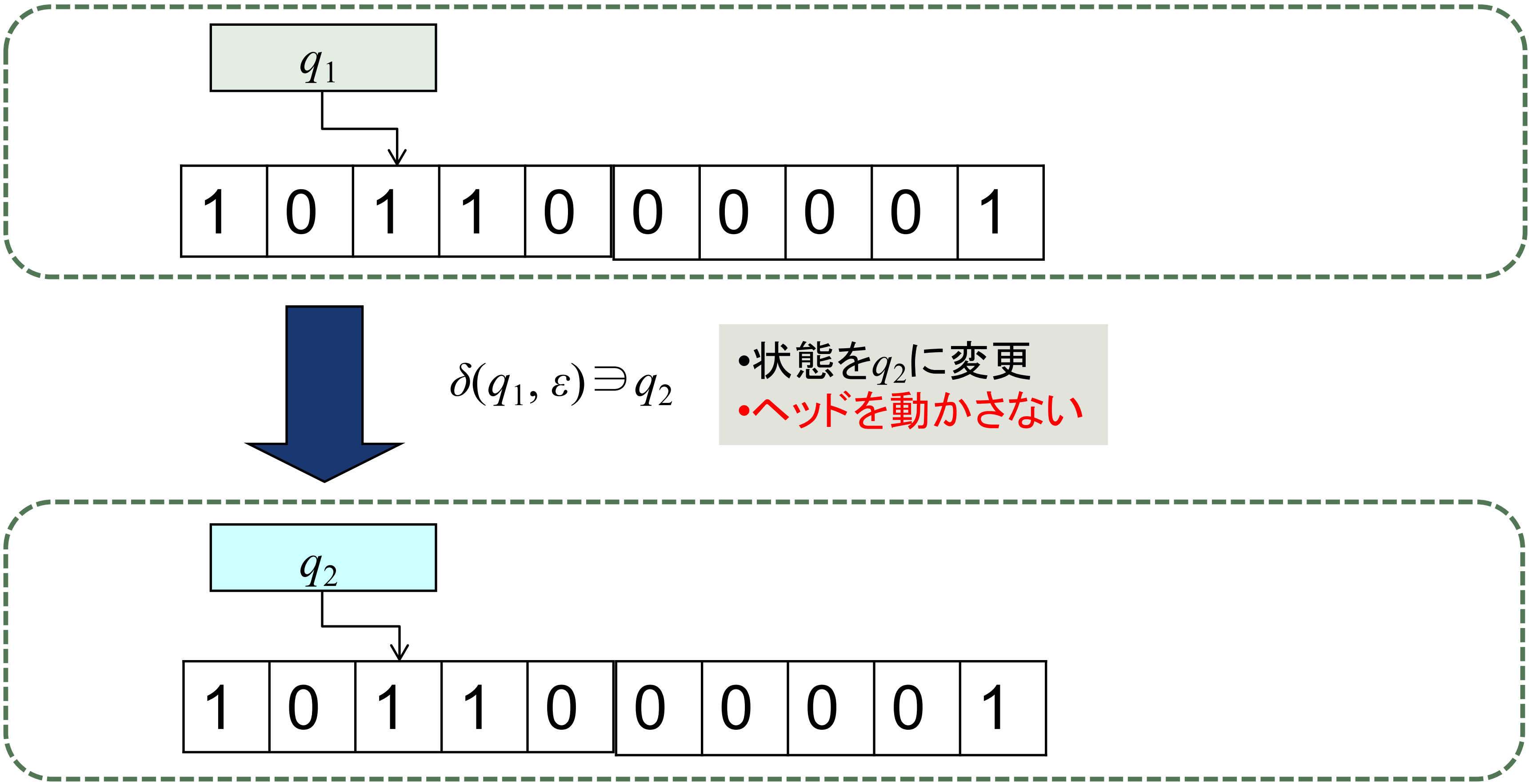
本日の内容

- ε-遷移を含む非決定性有限オートマトン(ε-NFA)
- NFAとε-NFAの等価性

ε-遷移付き
非決定性有限オートマトン

ε-遷移とは？

- テープヘッドを動かさず状態だけを変化させる遷移.



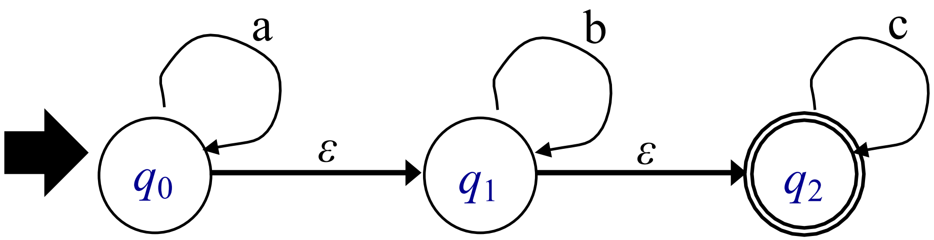
ε-遷移付き非決定性有限オートマトン

【定義】 ε-遷移付き非決定性有限オートマトン(ε-NFA)とは，次を満たす5つ組 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ をいう.

- Q は状態の空でない有限集合.
- Σ は記号の空でない有限集合で，アルファベットと呼ばれる.
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ は状態遷移関数.
- $q_0 \in Q$ は開始状態.
- $F \subseteq Q$ は最終状態の集合.

NFA は ε-NFA の特別な場合である.

ε-NFAの例

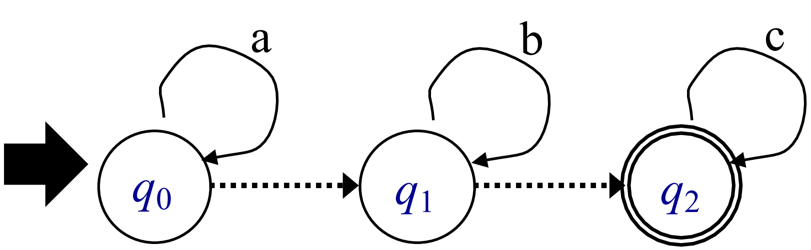


状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
アルファベット	{ a, b, c }
状態遷移関数	（右表のとおり）
初期状態	q_0
最終状態集合	$\{q_2 \}$

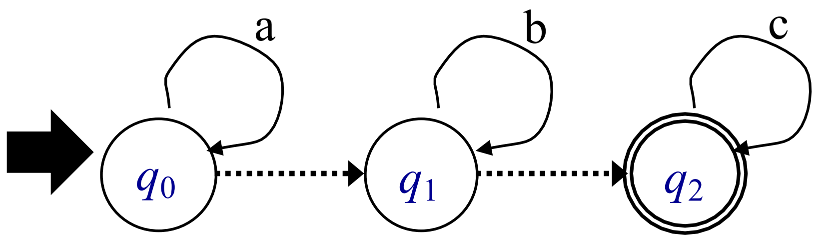
状態遷移関数 δ

	a	b	c	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

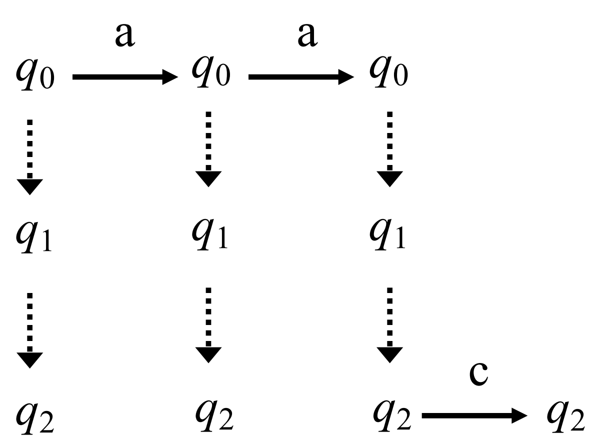
以降，状態遷移図におけるε-遷移を破線で表し辺ラベルを省くことにする.



ε-NFAの動作例



入力aacに対する動作例



ε-閉包

【定義】 ε-NFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$に対して，$Q$上の関係 E を

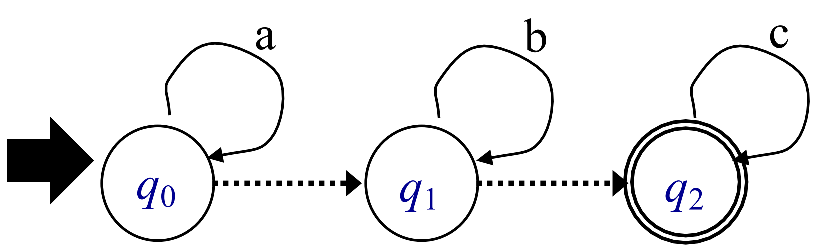
$$E = \{ (p, q) \mid p, q \in Q,\ q \in \delta(p, \varepsilon) \}$$

と定める．E の反射的推移閉包 E^* に対し，次のように定める．

(1) 任意の $q \in Q$ に対して，$E^*(q) = \{ r \mid (q, r) \in E^* \}$.

(2) 任意の $P \subseteq Q$ に対して，$E^*(P) = \bigcup_{r \in P} E^*(r)$.

q から ε-遷移のみで到達可能な状態の集合



$E^*(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

$E^*(q_1) = \{q_1, q_2\}$

$E^*(q_2) = \{q_2\}$

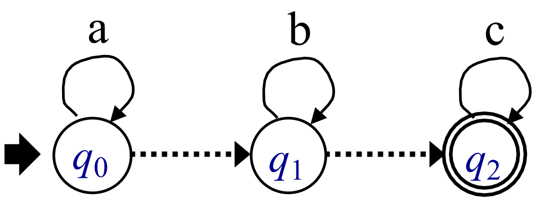
ε-NFAの動作の定義

【定義】 ε-NFA $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$の状態遷移関数 δ に対し
関数 $\bar{\delta}: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ を次で定める.

任意の $(q, a) \in Q \times \Sigma$ に対して $\bar{\delta}(q, a) = E^*(\delta(q, a))$.

$\bar{\delta}$ を関数 $\bar{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ へ自然に拡張し,
さらに関数 $\bar{\delta}: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$ へ拡張する.

例



$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$

	a	b	c	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

関数 $\bar{\delta}: Q \times \Sigma \to 2^Q$

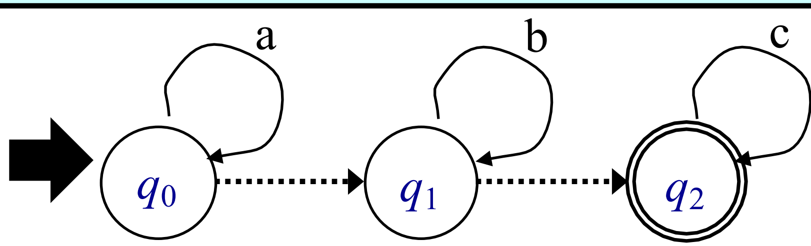
	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$

$$\bar{\delta}(q, a) = E^*(\delta(q, a))$$

ε-NFAによる文字列の受理

【定義】 $M=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を ε-NFAとする．
M が文字列 $w \in \Sigma^*$ を**受理する**とは，次が成り立つときをいう．

$$\bar{\delta}(E^*(q_0), w) \cap F \neq \varnothing$$



$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}(E^*(q_0), \mathrm{a}) \\
&= \bar{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \mathrm{a}) \\
&= \bar{\delta}(q_0, \mathrm{a}) \cup \bar{\delta}(q_1, \mathrm{a}) \cup \bar{\delta}(q_2, \mathrm{a}) \\
&= \{q_0, q_1, q_2\} \cup \varnothing \cup \varnothing \\
&= \{q_0, q_1, q_2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\delta}(E^*(q_0), \mathrm{ab}) \\
&= \bar{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \mathrm{ab}) \\
&= \bar{\delta}(q_0, \mathrm{ab}) \cup \bar{\delta}(q_1, \mathrm{ab}) \cup \bar{\delta}(q_2, \mathrm{ab}) \\
&= \bar{\delta}(\bar{\delta}(q_0, \mathrm{a}), \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(\bar{\delta}(q_1, \mathrm{a}), \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(\bar{\delta}(q_2, \mathrm{a}), \mathrm{b}) \\
&= \bar{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(\varnothing, \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(\varnothing, \mathrm{b}) \\
&= \bar{\delta}(\{q_0, q_1, q_2\}, \mathrm{b}) \\
&= \bar{\delta}(q_0, \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(q_1, \mathrm{b}) \cup \bar{\delta}(q_2, \mathrm{b}) \\
&= \varnothing \cup \{q_1, q_2\} \cup \varnothing \\
&= \{q_1, q_2\}
\end{aligned}$$

ε-NFAの受理する言語

【定義】 ε-NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$に対し，次で定まる言語 $L(M)$ をMの受理する言語と呼ぶ.

$$L(M) = \{ w \mid w \in \Sigma^*, \bar{\delta}(E^*(q_0), w) \cap F \neq \varnothing \}$$

NFAとε-NFAの等価性

NFAとε-NFAの等価性

【定理2.2】L を任意の言語とする．このとき，次の(1)(2)は等価である.

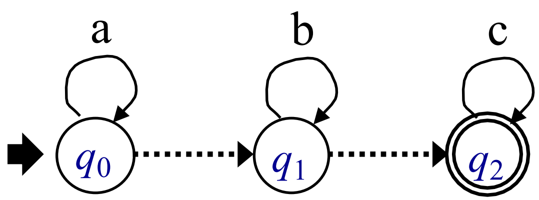
(1) ある ε-NFA M が存在して $L=L(M)$となる.

(2) ある NFA M' が存在して $L=L(M')$となる.

定理2.2の証明

- (2) $\Rightarrow$ (1)は自明. (1) $\Rightarrow$ (2)を示す.
- $L=L(M)$となる ε-NFA を $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ とする.
- 関数$\bar{\delta} : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ を用いて, (拡張された)NFA $M' = (Q, \Sigma, \bar{\delta}, E^*(q_0), F)$ を構成する.
- $L(M) = L(M')$ は明らか.

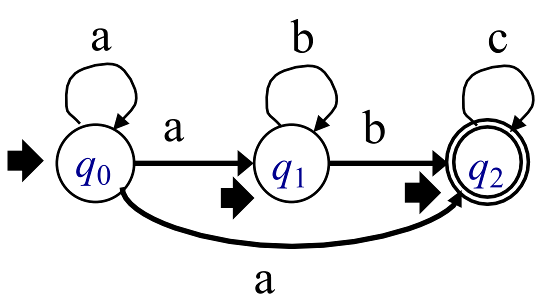
例



状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
アルファベット	{ a, b, c }
状態遷移関数	(右表のとおり)
初期状態	q_0
最終状態集合	$\{q_2\}$

	a	b	c	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

ε-NFAを(拡張された)NFAに変換



状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
アルファベット	{ a, b, c }
状態遷移関数	(右表のとおり)
初期状態集合	$\{ q_0, q_1, q_2 \}$
最終状態集合	$\{ q_2\}$

	a	b	c
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$