# 計算可能性理論

## Computability Theory

11．Postの対応問題

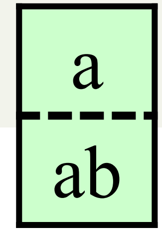
九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

# 本日の内容

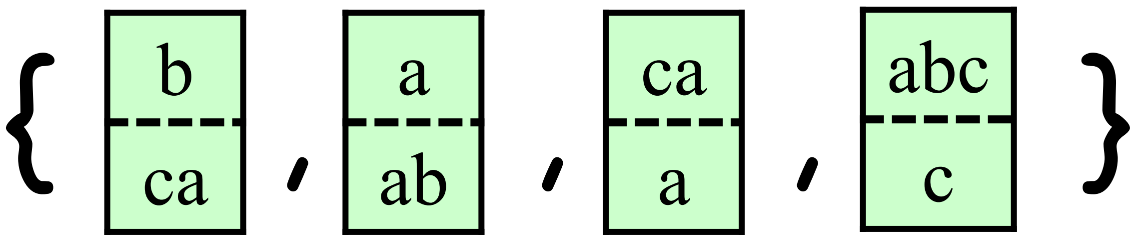
- Postの対応問題
- Postの対応問題の判定不可能性の証明
- $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$判定不可能性の証明

# Postの対応問題

# Postの対応問題




- PCPドミノ: 上と下の二つの文字列を含む.
- PCPドミノの集まり:




- PCPドミノの集まりから, 繰り返しを許してPCPドミノを選んでリストをつくる. このとき, 上の文字列の連結と下の文字列の連結が一致するリストをマッチとよぶ.

# Postの対応問題

- 以下のPCPドミノの集まりはマッチをもつ.

{

| | | | |
|---|---|---|---|
| b | a | ca | abc |
| ca | ab | a | c |

}

マッチの例

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | ca | a | abc |
| ab | ca | a | ab | c |

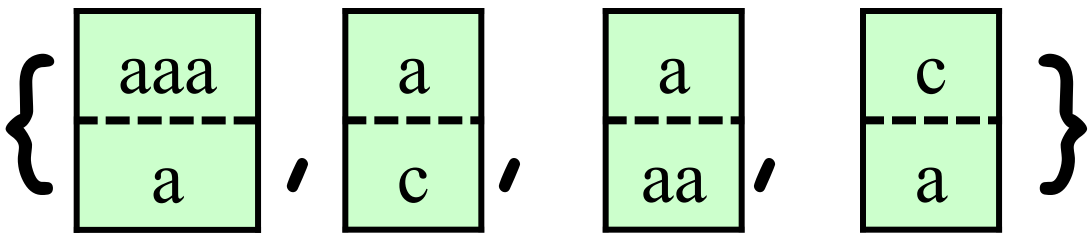
# Postの対応問題(Post correspondence problem)

**【定義】**
$PCP = \{\langle Q \rangle \mid Q$はマッチをもったPCPドミノの集まり$\}$

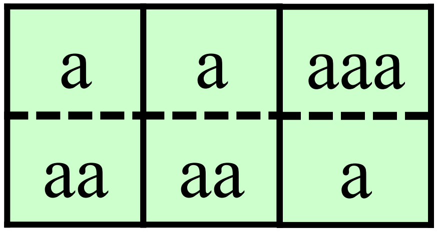
**【定理11.1】** $PCP$は判定不可能である.

# 例題

- 以下のPCPドミノの集まりはマッチをもつか？




マッチの例



# 例題

- 以下のPCPドミノの集まりはマッチをもつか？

$$\left\{ \left[\frac{\text{abc}}{\text{ab}}\right], \left[\frac{\text{ca}}{\text{a}}\right], \left[\frac{\text{acc}}{\text{ca}}\right] \right\}$$

*no match!*

# 演習問題1

- 以下のPCPドミノの集まりはマッチをもつか？

$$\left\{ \left[\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{abab}}\right], \left[\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right], \left[\frac{\mathrm{aba}}{\mathrm{b}}\right], \left[\frac{\mathrm{aa}}{\mathrm{a}}\right] \right\}$$

# 演習問題2

- 以下のPCPドミノの集まりはマッチをもつか？

$$\left\{ \left[\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right], \left[\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}}\right], \left[\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{bab}}\right] \right\}$$

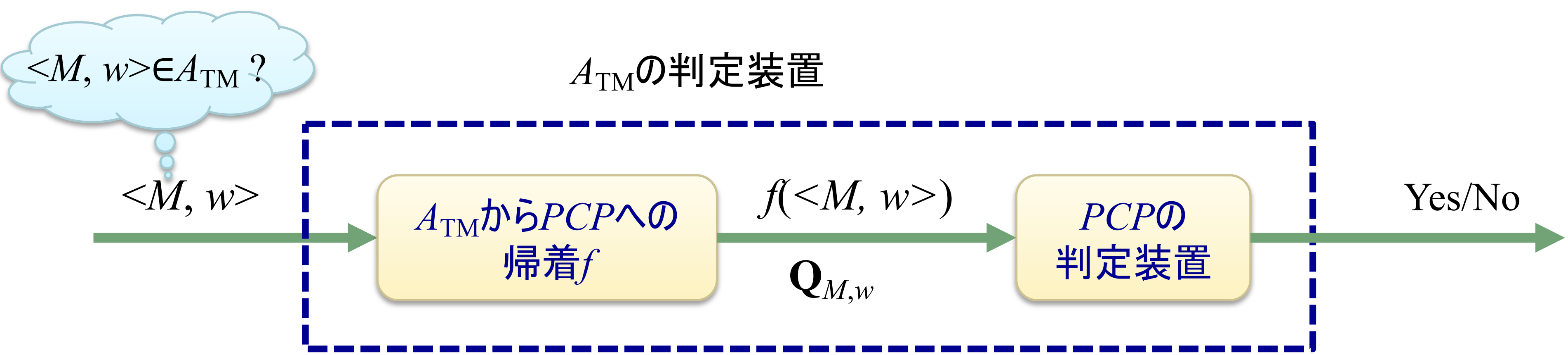
解けるかな？

**４４手詰めらしい！**
**もし解けたら教えてください…**

# Postの対応問題の判定不可能性の証明

# 定理11.1の証明：基本アイデア（1／9）

- $A_{\mathrm{TM}}$から $PCP$ への帰着 $f$ を定める.
  - TM $M$と文字列$w$の組の符号化$<M, w>$に対して，ドミノ集合 $\mathbf{Q}_{M,w}$ を次を満たすように定める.
    $$<M,w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow \mathbf{Q}_{M,w} \in PCP$$
  - $f(<M,w>) = \mathbf{Q}_{M,w}$ とする.
- $PCP$の判定装置を仮定すると，$A_{\mathrm{TM}}$の判定装置が作れてしまう.



# 定理11.1の証明：基本アイデア（2／9）

- 1-DTM $M$ の $w \in \Sigma^*$に対する受理計算履歴とは，次を満たす計算状況の列$C_0, C_1, \ldots, C_m$をいう.
  1. $C_0$ は $M$ の $w$ に対する初期計算状況
  2. $C_m$ は $M$ の受理計算状況
  3. $C_i$ は $M$ の遷移規則に従って，$C_{i-1}$から導かれる

# 定理11.1の証明：基本アイデア（３／９）

- 受理計算履歴の文字列表現
  - 計算状況を#記号で区切って並べた一本の文字列

$\delta(q_7,1)=(q_5,0,R)$

$$\#\,\$\,q_0\,0\,1\,0\,0\,\#\,\$\,2\,q_7\,1\,0\,0\,\#\,\$\,2\,0\,q_5\,0\,0\,\#\,\$\,2\,q_9\,0\,2\,0\,\#\;\ldots\;\#\,\$\,2\,1\,q_{acc}\,0\,2\,\#$$

$\delta(q_0,0)=(q_7,2,R)$ $\delta(q_5,0)=(q_9,2,L)$

# 定理11.1の証明：基本アイデア（4／9）

- 受理計算履歴を二段にし，1ステップ分ずらす.
- PCPドミノを並べてこれを構成することを考える.

| |
|---|
| #$ $q_0$ 0 1 0 0#$2$q_7$ 1 0 0#$2 0 $q_5$ 0 0# … #$2 1 $q_{acc}$ 0 2# |
| #$ $q_0$ 0 1 0 0#$ 2 $q_7$ 1 0 0#$2 0 $q_5$ 0 0#$2$q_9$ 0 2 0# … # |

# 定理11.1の証明：基本アイデア（５／９）

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | $ $q_0$ 0 1 0 0 | # | $ 2 $q_7$ 1 0 0 | # | $ 2 0 $q_5$ 0 0 | # | … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ 0 2 # |
| # $ $q_0$ 0 1 0 0 # | $ 2 $q_7$ 1 0 0 | # | $ 2 0 $q_5$ 0 0 | # | $ 2 $q_9$ 0 2 0 | # | … | # | |

TYPE 0

$w$=0100に対する開始状況を
表すPCPドミノ

| |
|---|
| # |
| #$q_0$0100# |

TYPE 1

計算状況の区切りを
表すPCPドミノ

| |
|---|
| # |
| # |

# 定理11.1の証明：基本アイデア（6／9）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | $ | $q_0$ 0 | 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | $q_7$ 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | 0 $q_5$ 0 | 0 | # | … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ 0 2 # |
| # $ $q_0$ 0 1 0 0 # | $ | 2 $q_7$ | 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | 0 $q_5$ | 0 | 0 | # | $ | 2 | $q_9$ 0 2 | 0 | # | … | # | |

**TYPE 0**

$w$=0100に対する初期計算状況を表すPCPドミノ

| |
|---|
| # |
| #$$q_0$0100# |

**TYPE 1**

計算状況の区切りを表すPCPドミノ

| |
|---|
| # |
| # |

**TYPE 2**

文字が変化しないセルを表すPCPドミノ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $ | 0 | 1 | 2 | B |
| $ | 0 | 1 | 2 | B |

# 定理11.1の証明：基本アイデア（7／9）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | $ | $q_0$ 0 | 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | $q_7$ 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | 0 $q_5$ 0 | 0 | # | … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ 0 2 # |
| # $ $q_0$ 0 1 0 0 # | $ | 2 $q_7$ | 1 | 0 | 0 | # | $ | 2 | 0 $q_5$ | 0 | 0 | # | $ | 2 | $q_9$ 0 2 | 0 | # | … | # | |

**TYPE 3**

ヘッドを右に動かす遷移を
表すPCPドミノ

| $q_0 0$ |
|---|
| $2 q_7$ |

$\delta(q_0,0)=(q_7,2,R)$

| $q_7 1$ |
|---|
| $0 q_5$ |

$\delta(q_7,1)=(q_5,0,R)$

**TYPE 4**

ヘッドを左に動かす遷移を
表すPCPドミノ

| $0 q_5 0$ |
|---|
| $q_9 0 2$ |

$\delta(q_5,0)=(q_9,2,L)$

# 定理11.1の証明：基本アイデア（8／9）

- 上段の右端が余るので，つじつま合せ．

| | | |
|---|---|---|
| … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ 0 2 # |
| … | # | |

上段，下段に文字列

| |
|---|
| $ 2 1 $q_{acc}$ 2 # $ 2 1 $q_{acc}$ # $ 2 $q_{acc}$ # $ $q_{acc}$ # $q_{acc}$ # # |

を付加

| | | | |
|---|---|---|---|
| … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ 0 2 # | $ 2 1 $q_{acc}$ 2 # $ 2 1 $q_{acc}$ # $ 2 $q_{acc}$ # $ $q_{acc}$ # $q_{acc}$ # # |
| … | # | $ 2 1 $q_{acc}$ | 2 # $ 2 1 $q_{acc}$ # $ 2 $q_{acc}$ # $ $q_{acc}$ # $q_{acc}$ # # |

# 定理11.1の証明：基本アイデア（９／９）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| … | # | $ | 2 | 1 | $q_{acc}$ 0 | 2 | # | $ | 2 | 1 | $q_{acc}$ 2 | # | $ | 2 | 1 $q_{acc}$ | # | $ | 2 $q_{acc}$ | # | $ $q_{acc}$ | # | $q_{acc}$ # # |
| … | # | $ | 2 | 1 | $q_{acc}$ | 2 | # | $ | 2 | 1 | $q_{acc}$ | # | $ | 2 | $q_{acc}$ | # | $ | $q_{acc}$ | # | $q_{acc}$ | # | # |

**TYPE 5** 受理状態の右側の文字を削除するPCPドミノ

$\left[\frac{q_{acc}0}{q_{acc}}\right]$ $\left[\frac{q_{acc}1}{q_{acc}}\right]$ $\left[\frac{q_{acc}2}{q_{acc}}\right]$ $\left[\frac{q_{acc}B}{q_{acc}}\right]$

**TYPE 6** 受理状態の左側の文字を削除するPCPドミノ

$\left[\frac{0q_{acc}}{q_{acc}}\right]$ …..

**TYPE 7** 受理計算履歴の右端を表すPCPドミノ

$\left[\frac{q_{acc}\#\#}{\#}\right]$

# ドミノ集合$\mathbf{Q}_{M,w}$の定義（まとめ）

$$\mathbf{Q}_{M,w} = \Bigg\{ \underset{\text{TYPE 0}}{\left[\frac{\#}{\#\$q_0w\#}\right]}\ w\in\Sigma^*,\quad \underset{\text{TYPE 1}}{\left[\frac{\#}{\#}\right]},\quad \underset{\text{TYPE 2}}{\left[\frac{c}{c}\right]}\ c\in\Gamma,$$

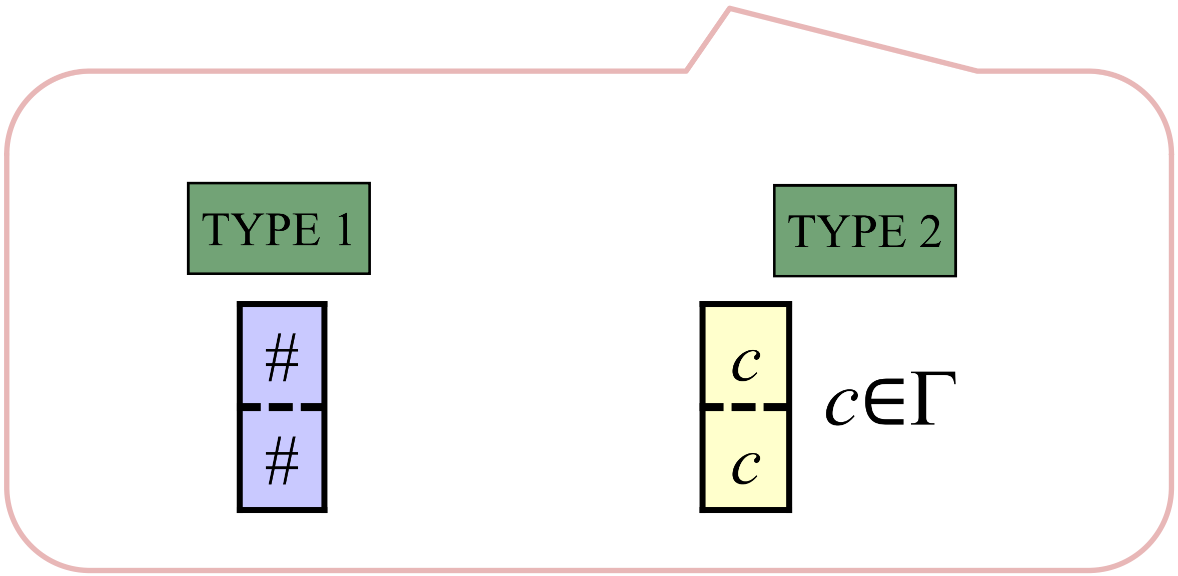
$$\underset{\text{TYPE 3}}{\left[\frac{qa}{br}\right]}\ \delta(q,a)=(r,b,\mathrm{R}),\quad \underset{\text{TYPE 4}}{\left[\frac{cqa}{rcb}\right]}\ \delta(q,a)=(r,b,\mathrm{L})\ \ c\in\Gamma,$$

$$\underset{\text{TYPE 5}}{\left[\frac{q_{\mathrm{acc}}c}{q_{\mathrm{acc}}}\right]}\ c\in\Gamma,\quad \underset{\text{TYPE 6}}{\left[\frac{cq_{\mathrm{acc}}}{q_{\mathrm{acc}}}\right]}\ c\in\Gamma,\quad \underset{\text{TYPE 7}}{\left[\frac{q_{\mathrm{acc}}\#\#}{\#}\right]} \Bigg\}$$

# ドミノ集合$\mathbf{Q}_{M,w}$の性質

- 次の性質が成り立つ.

  $M$が$w$を受理する$\Longrightarrow\mathbf{Q}_{M,w}$がマッチをもつ.
- 逆は成り立つか？
- 答はNo.
  - なぜなら, TYPE 1, 2のドミノは単独でマッチであるから.



# ドミノ集合$\mathbf{Q}_{M,w}$の改造

- $*\notin\Gamma$とする.
- TYPE 1～7について
  - 上段: 各文字の左側に$*$を加える.
  - 下段: 各文字の右側に$*$を加える.
- TYPE 0だけは左端にも$*$をつける.

TYPE 0

$$*\#$$

$$*\#*\$*q_0*w_1*w_2*\ldots*w_n*\#*$$

# 改造後のドミノ集合$\mathbf{Q}_{M,w}$

TYPE 1

$$\left[\frac{*\#}{\#*}\right]$$

TYPE 2

$$\left[\frac{*c}{c*}\right] \quad c\in\Gamma$$

TYPE 8

$$\left[\frac{*\clubsuit}{\clubsuit}\right] \quad \clubsuit\notin \Gamma\cup\{*\}$$

TYPE 3

$$\left[\frac{*q*a}{b*r*}\right] \quad \delta(q,a)=(r,b,\mathrm{R})$$

TYPE 4

$$\left[\frac{*c*q*a}{r*c*b*}\right] \quad \delta(q,a)=(r,b,\mathrm{L}),\ c\in\Gamma$$

TYPE 5

$$\left[\frac{*q_{\mathrm{acc}}*c}{q_{\mathrm{acc}}*}\right] \quad c\in\Gamma$$

TYPE 6

$$\left[\frac{*c*q_{\mathrm{acc}}}{q_{\mathrm{acc}}*}\right] \quad c\in\Gamma$$

TYPE 7

$$\left[\frac{*q_{\mathrm{acc}}*\#*\#}{\#*}\right]$$

# 今度は「逆向き」も成立する

- $\mathbf{Q}_{M,w}$ がマッチをもつ$\Longrightarrow$ $M$ が $w$ を受理する.
  - なぜなら，そのマッチは
    TYPE 0のPCPドミノで始まり
    TYPE 8のPCPドミノで終わるしかない.
  - TYPE 3とTYPE 4のドミノが，遷移可能な2つの計算状況をつなぐことを保証する.
  - また，TYPE 7のドミノが，最後の状態が受理状態になっていることを保証する.
- 以上より，次が成り立つ.

$$<M,w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow <\mathbf{Q}_{M,w}> \in PCP.$$

# $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$の判定不可能性

再掲

# CFGに関する判定不可能問題(3)

**【定義】**

$AMBIG_{CFG} = \{\langle G\rangle \mid G$は**曖昧な**CFG $\}$

導出木を2つ以上もつ文字列 $w \in L(G)$ が存在する.

例

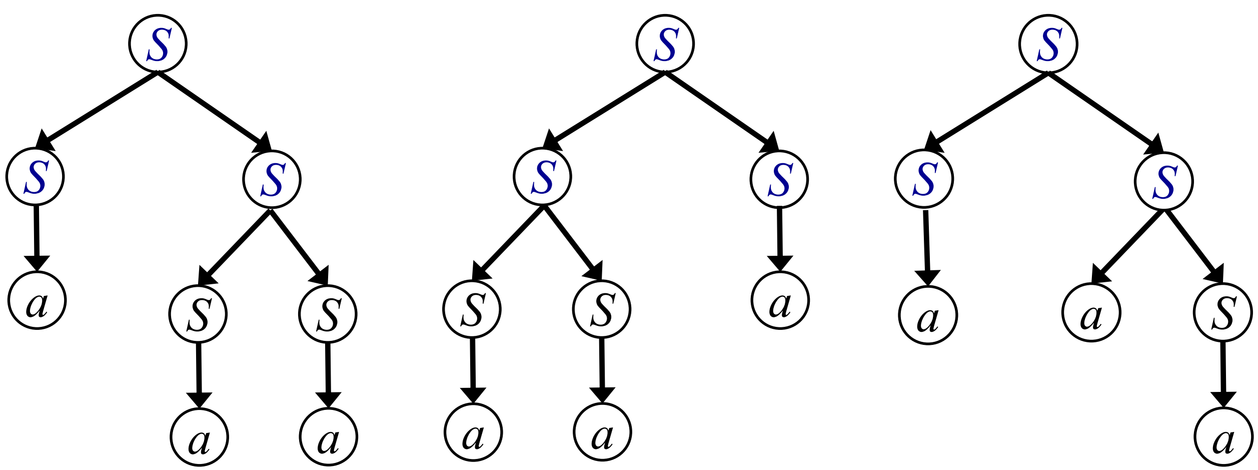
$G_1 = (N, \Sigma, P, S)$

$N = \{S\}$

$\Sigma = \{a\}$

$P = \{S \rightarrow SS,\ S \rightarrow aS,\ S \rightarrow a\}$

$w=aaa$に対する導出木



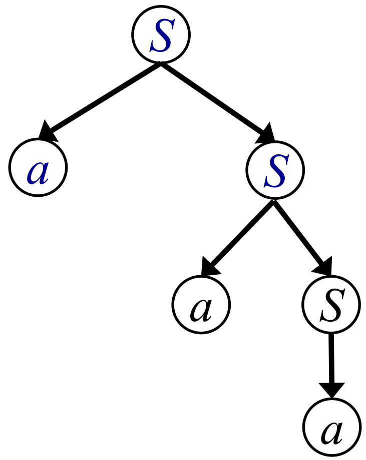
他にもある

再掲

# 例　同じ言語を生成する曖昧でないCFG

$$G_2 = (N, \Sigma, P, S)$$
$$N = \{S\}$$
$$\Sigma = \{a\}$$
$$P = \{S \to aS,\ S \to a\}$$

$w$=$aaa$に対する導出木



再掲

# $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$の判定不可能性

**【定理10.9】** $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$ は判定不可能である.

- 証明には，$PCP$ から $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$への帰着を用いる．．

# $PCP$ から $AMBIG_{CFG}$ への帰着：アイデア

$$Q = \left\{ \overset{1}{\begin{bmatrix} \text{bab} \\ \text{a} \end{bmatrix}},\ \overset{2}{\begin{bmatrix} \text{c} \\ \text{bc} \end{bmatrix}},\ \overset{3}{\begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{ab} \end{bmatrix}} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$G = (\{S, U, V\}, \{\text{a}, \text{b}, \text{c}, 1, 2, 3\}, \text{P}, \text{S}\}$$

$$P = \{ \begin{array}{l} U \to \text{bab}\ U\ 1, \\ V \to \text{a}\ V\ 1, \\ U \to \text{bab}\ 1, \\ V \to \text{a}\ 1, \end{array} \quad \begin{array}{l} U \to \text{c}\ U\ 2, \\ V \to \text{bc}\ V\ 2, \\ U \to \text{c}\ 2, \\ V \to \text{bc}\ 2, \end{array} \quad \begin{array}{l} U \to \text{a}\ U\ 3, \\ V \to \text{ab}\ V\ 3, \\ U \to \text{a}\ 3, \\ V \to \text{ab}\ 3, \end{array}$$

$$S \to U \mid V \}$$

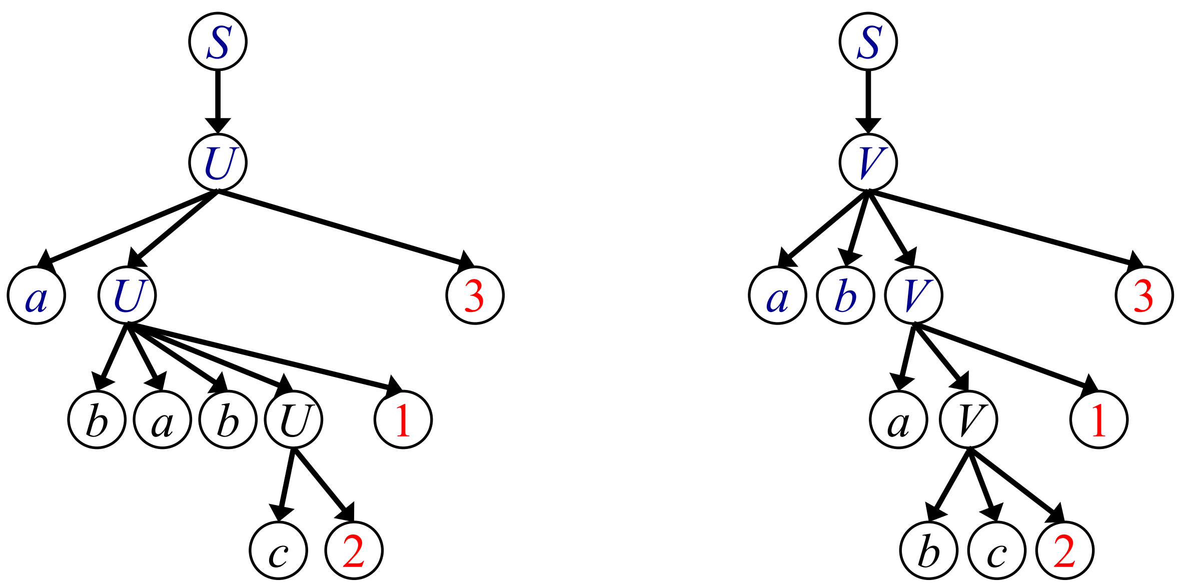
# $PCP$ から $AMBIG_{CFG}$ への帰着：アイデア

| 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a | bab | c |
| ab | a | bc |

マッチ

$312^R = 213$

文字列 ababc 213 に対する2つの導出木



# $PCP$ から $AMBIG_{CFG}$への帰着：アイデア

アルファベットΣ上のPCPドミノ集合

$$Q = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \boxed{\begin{array}{c} u_1 \\ \hdashline v_1 \end{array}} \end{array}, \begin{array}{c} 2 \\ \boxed{\begin{array}{c} u_2 \\ \hdashline v_2 \end{array}} \end{array}, \cdots, \begin{array}{c} n \\ \boxed{\begin{array}{c} u_n \\ \hdashline v_n \end{array}} \end{array} \right\}$$

に対して，CFG $\mathbf{G}_Q$ を次で定める.

$$\mathbf{G}_Q = (\{S, U, V\}, \Sigma \cup \{1, 2, \ldots, n\}, P, S)$$

$$P = \{U \to u_i \ U\, i \mid i=1,2,\ldots,n\} \cup \{U \to u_i \ \ i \mid i=1,2,\ldots,n\}$$
$$\cup \{V \to v_i \ V\, i \mid i=1,2,\ldots,n\} \cup \{V \to v_i \ \ i \mid i=1,2,\ldots,n\}$$
$$\cup \{S \to U, S \to V\}$$

# 定理10.9の証明

- PCPドミノ $Q$ の符号化$<Q>$に対して，
  $f(<G>) = <\mathbf{G}_{\mathrm{Q}}>$ とおくと，
  $f$ は $PCP$ から $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$ への帰着となる．
- $PCP$ は判定不可能であるから，
  $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$ も判定不可能である．