Kyushu University 100th 2011
知の新世紀を拓く

1-TM

計算可能性理論

Computability Theory

10. 判定不可能な言語（2）

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

本日の内容

- 帰着による判定不可能性の証明
- 停止性判定
- すべての入力に対する停止性判定
- 空性判定
- 正規性判定
- 等価性判定
- CFGに関する判定不可能問題
- 付録：CFG $\mathbf{G}_{M,w}$の構成

帰着による判定不可能性の証明

計算可能な関数

【定義】 関数 f: $\Sigma^* \to \Sigma^*$が**計算可能**であるとは，
以下を満たす DTM M が存在するときをいう.

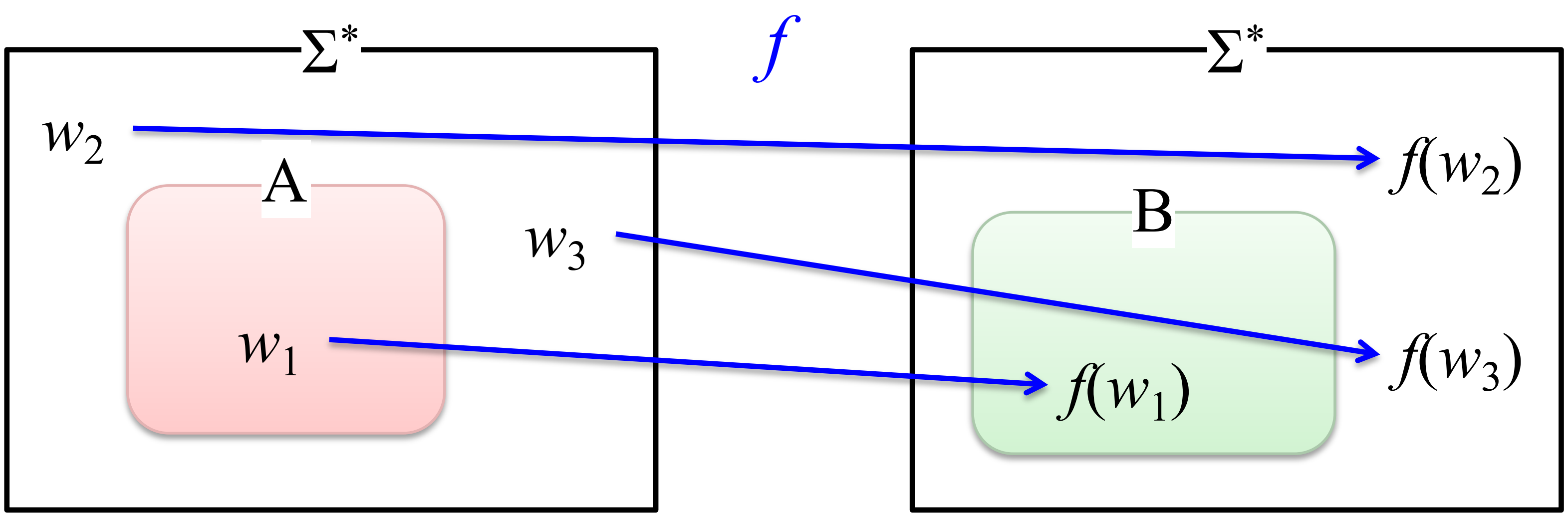
任意の入力 $w \in \Sigma^*$ に対して，
M はテープに $f(w)$ だけを書き出して停止する.

帰着可能

【定義】 A, B を Σ 上の言語とする.

すべての $w \in \Sigma^*$ について $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$

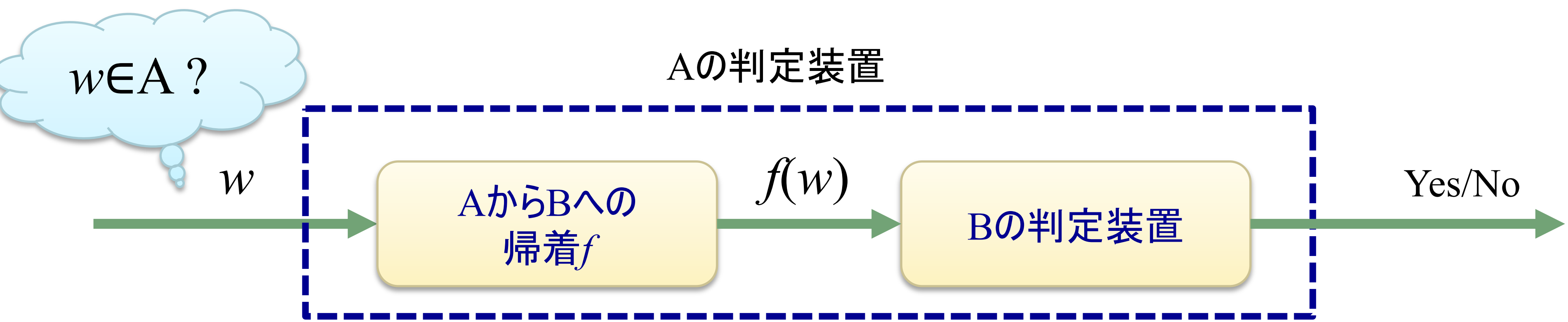
を満たす計算可能関数 $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ が存在するとき,
言語 A は言語 B に**帰着可能**であるといい,
関数 f をAからBへの**帰着**と呼ぶ.



帰着と判定不可能性

【定理10.1】言語A から 言語Bへの帰着 f が存在するとき，B が判定可能 ならば A も判定可能である．

- 証明は下図．



【系10.1】言語A から 言語Bへの帰着 f が存在するとき，A が判定不可能 ならば B も判定不可能である．

帰着による判定不可能性の証明

- A_{TM}の判定不可能性は，対角線論法により証明した.

- 系10.1により，言語Bの判定不可能性を示すには，
A_{TM} から言語Bへの帰着 f を示せばよい.

- 言語A_{TM} に限らず，既に判定不可能であることがわかっている言語Aについて，
言語A から言語Bへの帰着 f を示せばよい.

見取り図

$$\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$$

(A は B に帰着可能である)

$$\begin{tikzcd}
 & HALT_{\mathrm{TM}} \arrow[r] & HALTALL_{\mathrm{TM}} \\
 & E_{\mathrm{TM}} \arrow[r] & EQ_{\mathrm{TM}} \\
A_{\mathrm{TM}} \arrow[ruu] \arrow[ru] \arrow[r] \arrow[rd] \arrow[rdd] \arrow[rddd] & REGULAR_{\mathrm{TM}} & \\
 & E_{\mathrm{LBA}} & \\
 & ALL_{\mathrm{CFG}} \arrow[r] & EQ_{\mathrm{CFG}} \\
 & PCP \arrow[r] & AMBIG_{\mathrm{CFG}}
\end{tikzcd}$$

対角線論法
により証明

停止性判定

停止性判定

【定義】
$HALT_{\mathrm{TM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \mathrm{TM}\ M$ は入力 w に対し停止する$\}$

【定理10.2】 $HALT_{\mathrm{TM}}$は判定不可能である.

定理10.2の証明：アイデア

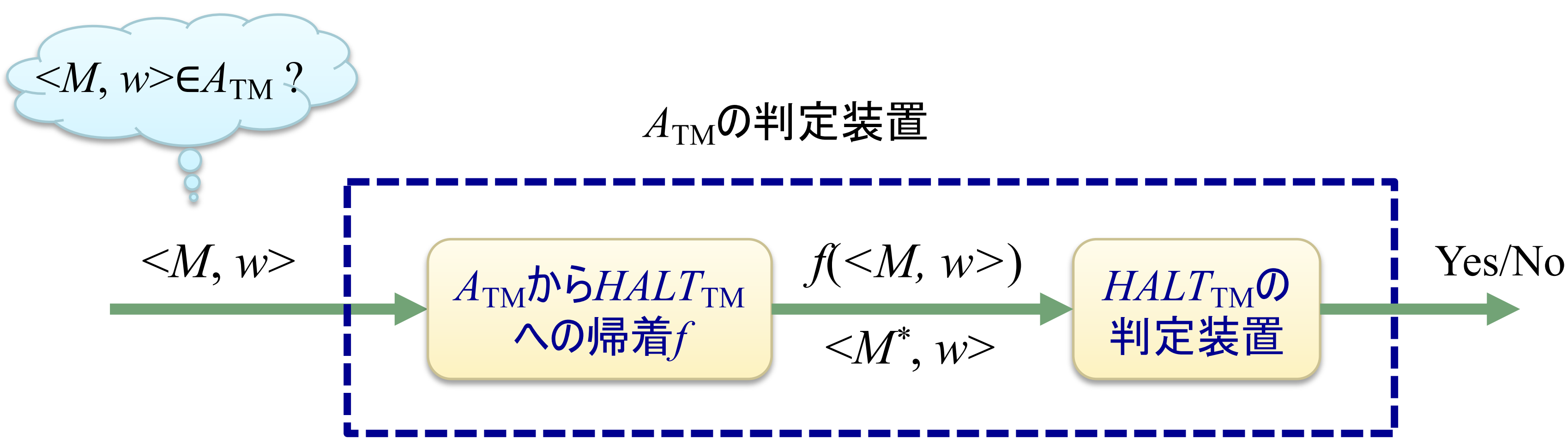
- TM M に対し，TM M^* を次で定義.
- $M^* =$ "入力 x に対して：
  1. 入力 x に対する M の動作を模倣する.
  2. M が受理したら受理し，拒否したらループに入る. "

	入力 w に対する M	入力 w に対する M^*
$w \in L(M)$	w を受理して停止	w を受理して停止
$w \notin L(M)$	w を拒否して停止	ループ
	ループ	

$$<M, w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow <M^*, w> \in HALT_{\mathrm{TM}}.$$

定理10.2の証明

- TM M と文字列 w の組の符号化$<M, w>$に対して，
  $f(<M, w>) = <M^*, w>$とおくと，
  f は A_{TM} から $HALT_{\mathrm{TM}}$ への帰着となる．
- A_{TM}は判定不可能であるから，
  $HALT_{\mathrm{TM}}$も判定不可能である．



すべての入力に対する停止性判定

すべての入力に対する停止性

【定義】
$HALTALL_{\mathrm{TM}}$
$=\{ <M>|$ TM M は任意の入力に対し停止する$\}$

【定理10.3】 $HALTALL_{\mathrm{TM}}$は判定不可能である.

定理10.3の証明: アイデア

- TM M と文字列wに依存するTM $\mathbf{U}_{M,w}$ を次で定める.
  $\mathbf{U}_{M,w}$ = "入力 x に対して:
  1. $x=w$ ならば2へ進み, $x \neq w$ ならば拒否する.
  2. w に対して M を動かす. M が受理すれば受理し拒否すれば拒否する. "

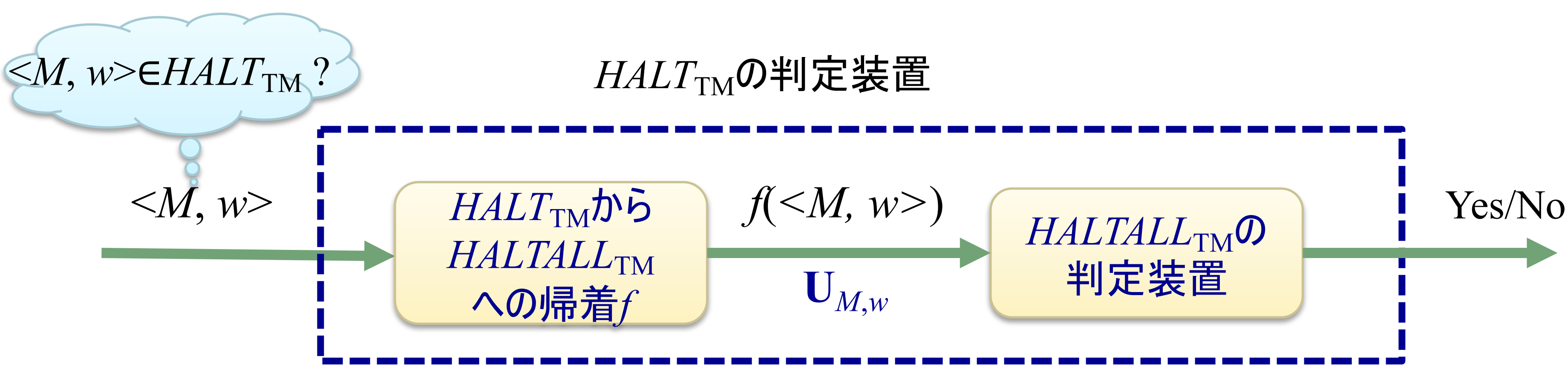
	入力wに対するM	入力xに対する$\mathbf{U}_{M,w}$	
		$x = w$	$x \neq w$
$w \in L(M)$	wを受理して停止	xを受理して停止	xを拒否して停止
$w \notin L(M)$	wを拒否して停止	xを拒否して停止	xを拒否して停止
	ループ	ループ	xを拒否して停止

Mをwに対して模倣

$$\langle M, w \rangle \in HALT_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow \mathbf{U}_{M,w} \in HALTALL_{\mathrm{TM}}$$

定理10.3の証明

- TM Mと文字列 w の組の符号化$<M, w>$に対して，
  $f(<M,w>) = \mathbf{U}_{M,w}$とおくと，
  f は$HALT_{\mathrm{TM}}$から $HALTALL_{\mathrm{TM}}$ への帰着となる．
- $HALT_{\mathrm{TM}}$ は判定不可能であるから，
  $HALLALL_{\mathrm{TM}}$も判定不可能である．



空性判定

空性判定

【定義】$E_{\mathrm{TM}}=\{ \langle M \rangle \mid \mathrm{TM}\ M$ は $L(M)=\emptyset$ を満たす$\}$

【定理10.4】E_{TM} は判定不可能である.

定理10.4の証明：アイデア

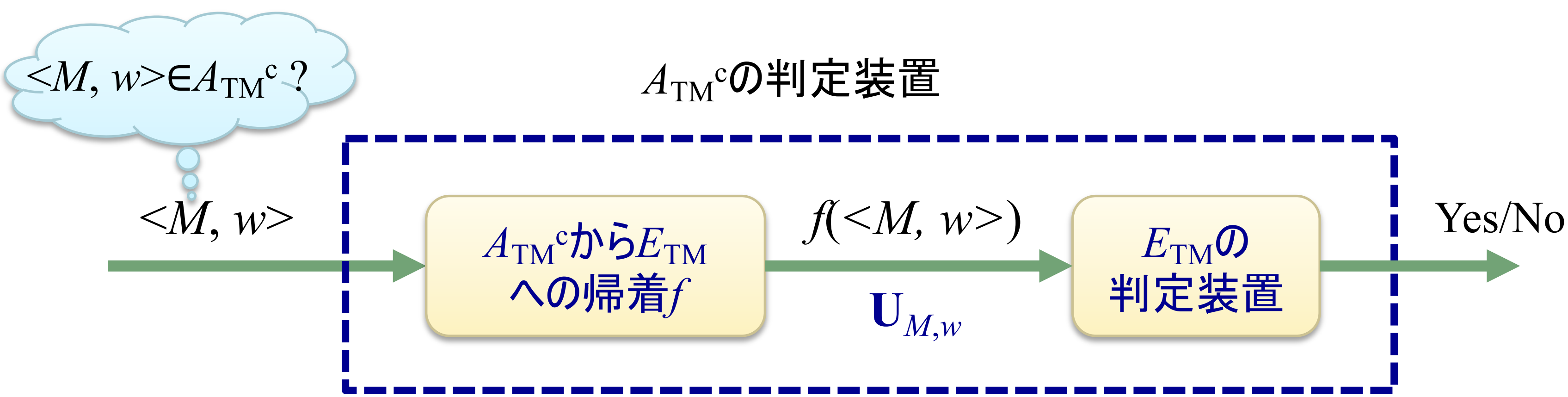
	入力wに対するM	入力xに対する$\mathrm{U}_{M,w}$		$\mathrm{U}_{M,w}$の認識する言語
		$x = w$	$x \neq w$	
$w \in L(M)$	wを受理して停止	xを受理して停止	xを拒否して停止	$\{w\}$
$w \notin L(M)$	wを拒否して停止	xを拒否して停止	xを拒否して停止	$\emptyset$
	ループ	ループ	xを拒否して停止	

Mをwに対して模倣

$$<M, w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow \mathrm{U}_{M,w} \notin E_{\mathrm{TM}}.$$

定理10.4の証明

- TM M と文字列 w の組の符号化$<M, w>$に対して，
$f(<M,w>) = \mathbf{U}_{M,w}$ とおくと，
f は$A_{\mathrm{TM}}{}^{\mathrm{c}}$ から E_{TM} への帰着となる．
- $A_{\mathrm{TM}}{}^{\mathrm{c}}$ は判定不可能であるから，
E_{TM}も判定不可能である．



正規性判定

正規性判定

【定義】
$REGULAR_{\mathrm{TM}} = \{ <M>|\ M$ は $L(M)$ が正規となる TM $\}$

【定理10.5】 $REGULAR_{\mathrm{TM}}$ は判定不可能である.

定理10.5の証明：アイデア（１／２）

- Σ上の非正規言語**L**を選ぶ.
- TM M と文字列wに依存するTM $\mathbf{V}_{M,w}$ を次で定める.

  $\mathbf{V}_{M,w}$ = "入力 x に対して:
  1. $x \in \mathbf{L}$ならば受理し, $x \notin \mathbf{L}$ならば2へ進む.
  2. w に対して M を動かす.
     M が受理すれば受理し, 拒否すれば拒否する. "

定理10.5の証明：アイデア（2／2）

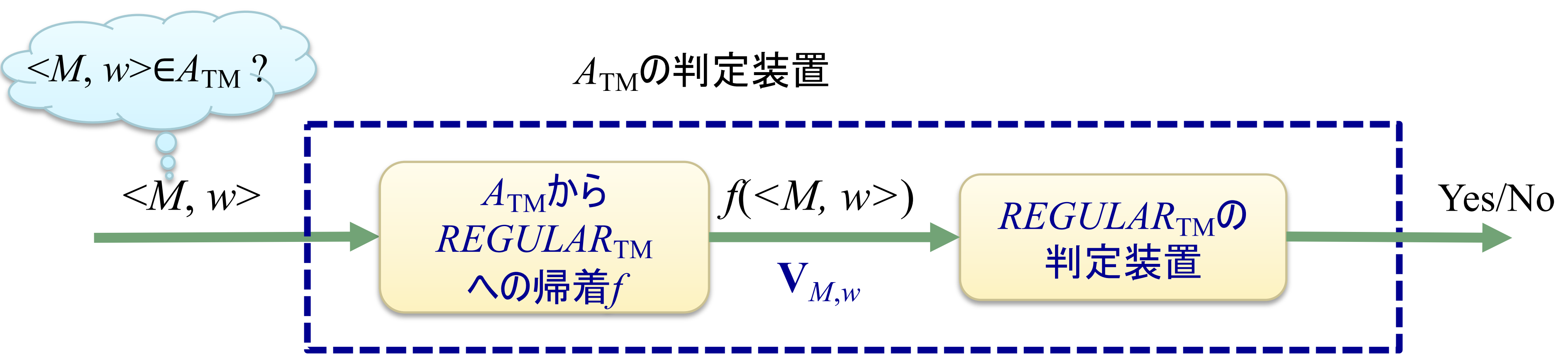
	入力wに対するM	入力xに対する$\mathbf{V}_{M,w}$		$\mathbf{V}_{M,w}$の認識する言語
		$x \in \mathbf{L}$	$x \notin \mathbf{L}$	
$w \in L(M)$	wを受理して停止	xを受理して停止	xを受理して停止	Σ^*
$w \notin L(M)$	wを拒否して停止	xを受理して停止	xを拒否して停止	$\mathbf{L}$
	ループ	xを受理して停止	ループ	

Mをwに対して模倣

$$<M, w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow \mathbf{V}_{M,w} \in REGULAR_{\mathrm{TM}}$$

定理10.5の証明

- TM M と文字列 w の組の符号化$<M, w>$に対して, $f(<M,w>) = \mathbf{V}_{M,w}$ とおくと,
  f は A_{TM}から $REGULAR_{\mathrm{TM}}$ へ帰着となる.
- A_{TM}は判定不可能であるから, $REGULAR_{\mathrm{TM}}$も判定不可能である.



等価性判定

等価性判定

【定義】
$EQ_{\mathrm{TM}} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1$ と M_2 は $L(M_1) = L(M_2)$ となる TM$\}$

【定理10.6】 EQ_{TM} は判定不可能である.

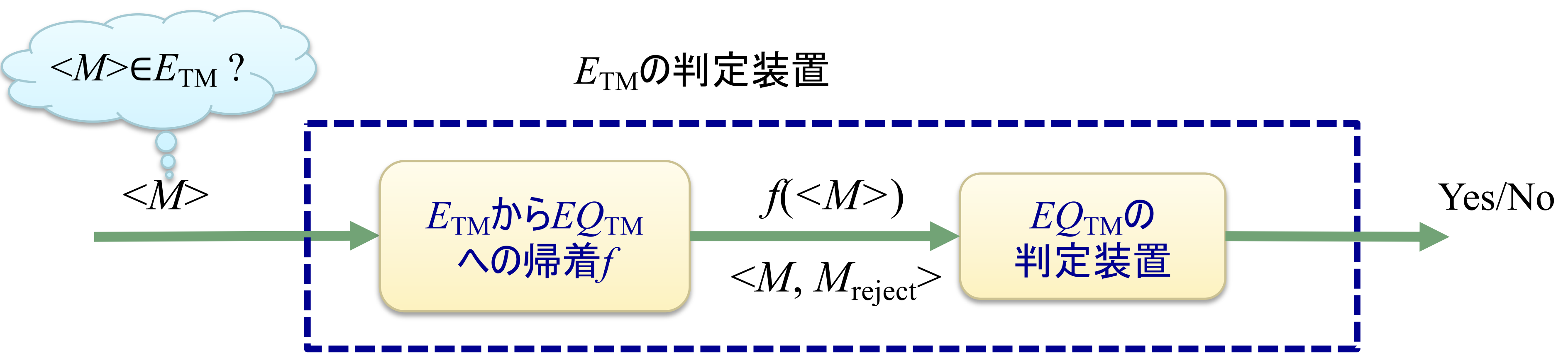
定理10.6の証明：アイデア

- M_{reject}をすべての入力を拒否するTMとする．
すなわち，$L(M_{\mathrm{reject}})=\emptyset$である．

$<M> \in E_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow <M, M_{\mathrm{reject}}> \in EQ_{\mathrm{TM}}$.

定理10.6の証明

- TM M の符号化$\langle M \rangle$に対して，
  $f(\langle M \rangle) = \langle M, M_{\mathrm{reject}} \rangle$ とおくと，
  f はE_{TM} から EQ_{TM} への帰着となる．
- E_{TM}は判定不可能であるから，
  EQ_{TM}も判定不可能である．



CFGに関する判定不可能問題

CFGに関する判定不可能問題(1)

【定義】
$ALL_{\mathrm{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid G$はCFGであり $L(G)=\Sigma^* \}$

$G_1 = (N, \Sigma, P, S)$
$N = \{S\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$P = \{S \to Sa, S \to Sb, S \to \varepsilon\}$

$L(G_1)=\Sigma^*$?

$G_2 = (N, \Sigma, P, S)$
$N = \{S, A, B\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
$P = \{S \to AB, A \to aA, A \to a, B \to Bb, B \to \varepsilon\}$

$L(G_2)=\Sigma^*$?

【定理10.7】 ALL_{CFG} は判定不可能である.

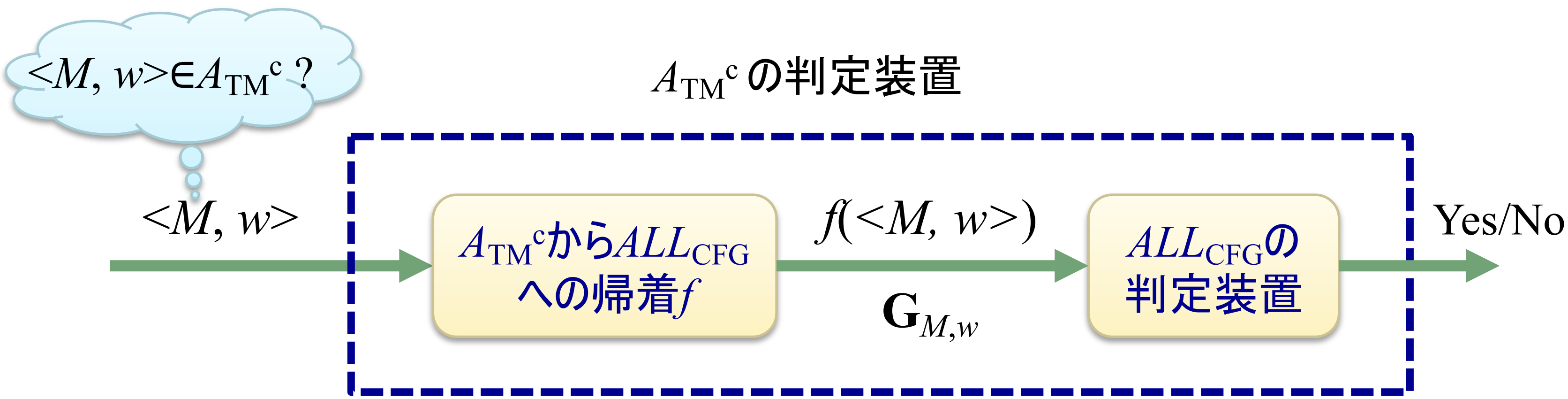
定理10.7の証明

- TM M と文字列 w の組$<M, w>$に対して，CFG $\mathbf{G}_{M,w}$ を次が成り立つように定める．

$$<M, w> \in A_{\mathrm{TM}} \Leftrightarrow \mathbf{G}_{M,w} \notin ALL_{\mathrm{CFG}}$$

$\mathbf{G}_{M,w}$の構成法は付録を参照

- $f(<M,w>) = \mathbf{G}_{M,w}$ とおくと，f は$A_{\mathrm{TM}}{}^{c}$から ALL_{CFG} への帰着である．
- $A_{\mathrm{TM}}{}^{c}$ は判定不可能であるから ALL_{CFG} も判定不可能である．



CFGに関する判定不可能問題(2)

【定義】

$EQ_{\mathrm{CFG}} = \{\langle G_1, G_2 \rangle \mid G_1$ と G_2 は CFG であり $L(G_1)=L(G_2)\}$

$G_1 = (N, \Sigma, P, S)$
- $N = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to aSb,\ S \to \varepsilon\}$

$G_2 = (N, \Sigma, P, S)$
- $N = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to ASb,\ S \to \varepsilon,\ A \to a\}$

$G_3 = (N, \Sigma, P, S)$
- $N = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to aSa,\ S \to bSb,\ S \to \varepsilon\}$

$G_4 = (N, \Sigma, P, S)$
- $N = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \to SS,\ S \to a,\ S \to b\}$

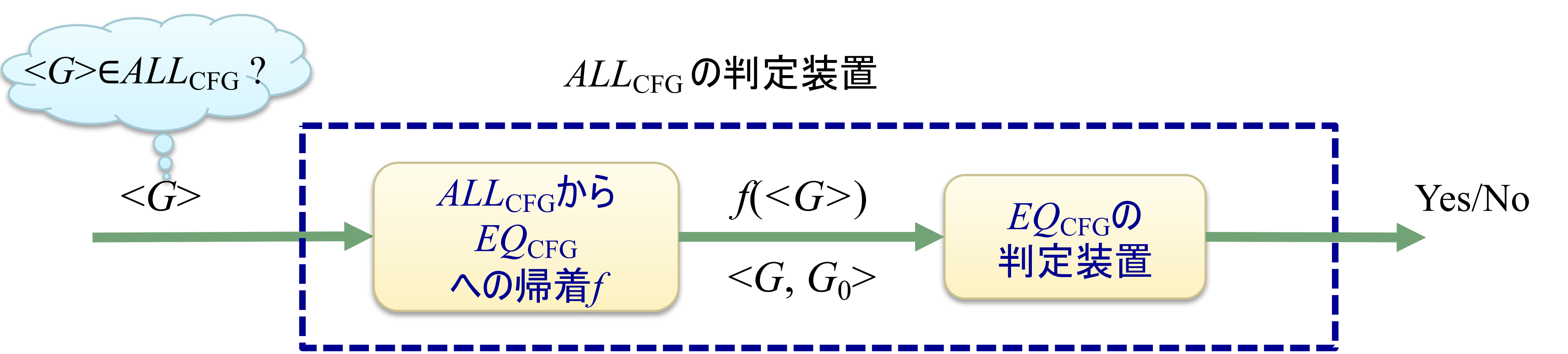
$L(G_1) = L(G_2)?$

$L(G_3) = L(G_4)?$

【定理10.8】 EQ_{CFG} は判定不可能である.

定理10.8の証明

- $L(G_0) = \Sigma^*$ となる CFG G_0を選ぶ.
- CFG G の符号化$<G>$に対して,
  $f(<G>) = <G, G_0>$ とおくと,
  f はALL_{CFG}から EQ_{CFG} への帰着となる.
- ALL_{CFG} は判定不可能であるから,
  EQ_{CFG} も判定不可能である.



CFGに関する判定不可能問題(3)

【定義】

$AMBIG_{\mathrm{CFG}} = \{\langle G\rangle \mid G$は曖昧なCFG $\}$

導出木を2つ以上もつ文字列 $w \in L(G)$ が存在する.

例

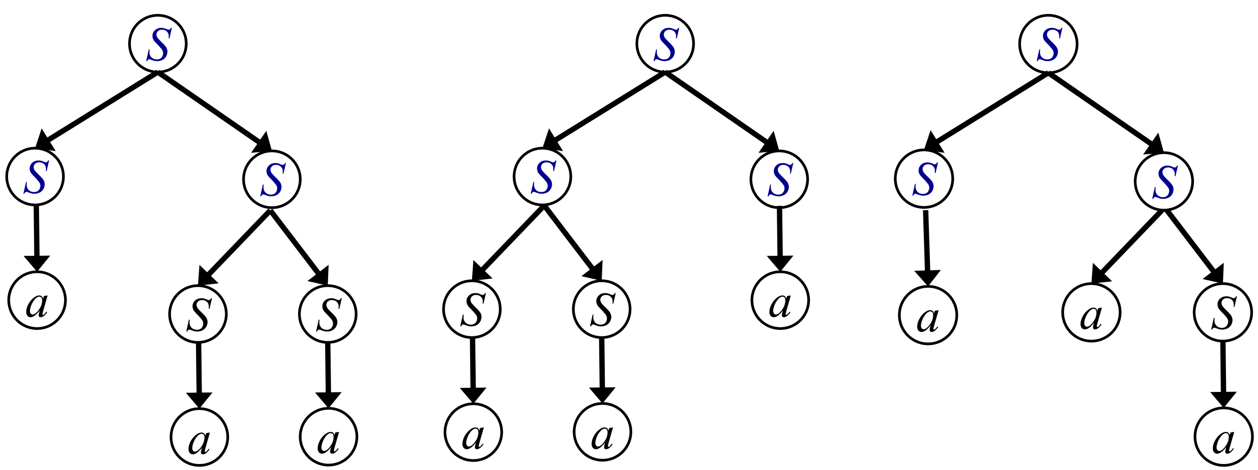
$G_1 = (N, \Sigma, P, S)$

$N = \{S\}$

$\Sigma = \{a\}$

$P = \{S \rightarrow SS,\ S \rightarrow aS,\ S \rightarrow a\}$

$w=aaa$に対する導出木



他にもある

例 同じ言語を生成する曖昧でないCFG

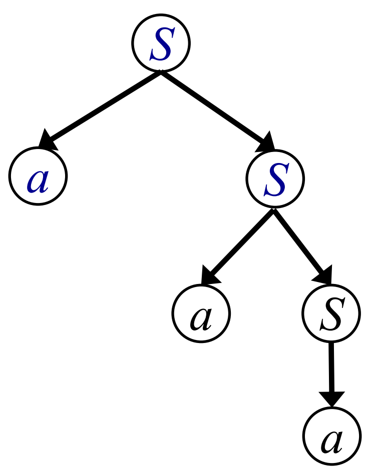
$G_2 = (N, \Sigma, P, S)$

$N = \{S\}$

$\Sigma = \{a\}$

$P = \{S \to aS,\ S \to a\}$

$w=aaa$に対する導出木



$AMBIG_{\mathrm{CFG}}$の判定不可能性

【定理10.9】 $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$ は判定不可能である.

- 証明には，次回紹介する問題 PCP から $AMBIG_{\mathrm{CFG}}$への帰着を用いるので，証明も次回に.

付録

CFG $G_{M,w}$ の構成法

受理計算履歴

- TM M の $w\in\Sigma^*$に対する受理計算履歴とは，次を満たす計算状況の列$C_0,C_1,\ldots,C_m$をいう.
  1. C_0 は M の w に対する初期計算状況.
  2. C_m は M の受理計算状況.
  3. すべての $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$に対して $C_i \vdash_M C_{i+1}$.

- $w \in L(M) \Leftrightarrow M$ の w に対する受理計算履歴が存在.

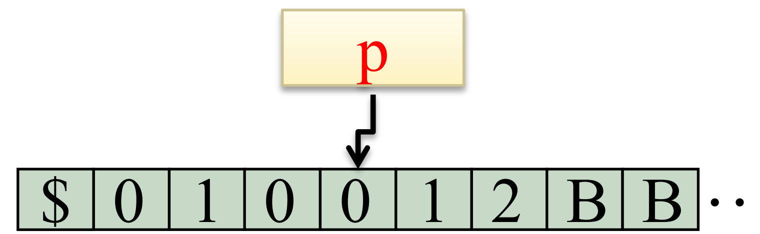
受理計算履歴の文字列表現

- TM M の計算状況を $\Gamma \cup Q$ 上の文字列として表す．

(p, \$010012, 4)

⬇ 文字列表現

\$010p011



- M の w に対する受理計算履歴を，計算状況の文字列表現を #で区切った文字列 $\#C_0\#C_1\#\ldots\#C_m$ として表す．

$\delta(q_7,1)=(q_5,0,R)$

\# \$ q_0 0 1 0 0 \# \$ 2 q_7 1 0 0 \# \$ 2 0 q_5 0 0 \# \$ 2 q_9 0 2 0 \# … \# \$ 2 1 q_{acc} 0 2

$\delta(q_0,0)=(q_7,2,R)$ $\delta(q_5,0)=(q_9,2,L)$

CFG $\mathbf{G}_{M,w}$ の構成：方針

- M の状態集合QとテープアルファベットΓに対して，$\Delta = \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$とおく.
- M の w に対する受理計算履歴以外のΔ上のすべての文字列を受理するPDA $\mathbf{P}_{M,w}$ を構成する.
- $\mathbf{P}_{M,w}$ を等価なCFG $\mathbf{G}_{M,w}$ に変換する.

$\mathbf{G}_{M,w}$ は，M の w に対する受理計算履歴以外のΔ上のすべての文字列を生成する.

入力が受理計算履歴でないことの判定

- 任意の $z \in \Delta^*$ に対して次が成立する.
  z が M の w に対する受理計算履歴の文字列表現でない
  $\Leftrightarrow$ z が次のいずれかを満たす.
  A) z が $\#C_0\#C_1\#\ldots\#C_m$（$C_i \in \{\$\}\Gamma^* Q \Gamma^*$）の形式でない.
  B) z が 上記の形式であり, 次のいずれかを満たす.
     1. $C_0 \neq \$q_0w$ （初期計算状況）.
     2. $C_m \notin \{\$\}\Gamma^*\{q_{\mathrm{acc}}\}\Gamma^*$（受理計算状況）.
     3. $C_i \vdash_M C_{i+1}$ が成り立たないような整数 i（$0 \le i \le m-1$）が存在.

A, B-1, B-2はDFAで判定可能.
B-3の判定を行うPDAについて考える.

B-3の判定で行うべきこと

- 二つの連続した計算状況 C_i と C_{i+1} を比較し状態遷移関数 δ に従っているかをチェック.
- δ に従っているならば，異なるのはヘッドの周辺のみであり，次の二つのパターンのいずれか.

ヘッドを右へ動かす動作

C_i # $ 2 $\boxed{q_7\ 1}$ 0 0

C_{i+1} # $ 2 $\boxed{0\ q_5}$ 0 0

$\delta(q_7,1)=(q_5,0,R)$

ヘッドを左へ動かす動作

C_i # $ 2 $\boxed{0\ q_5\ 0}$ 0

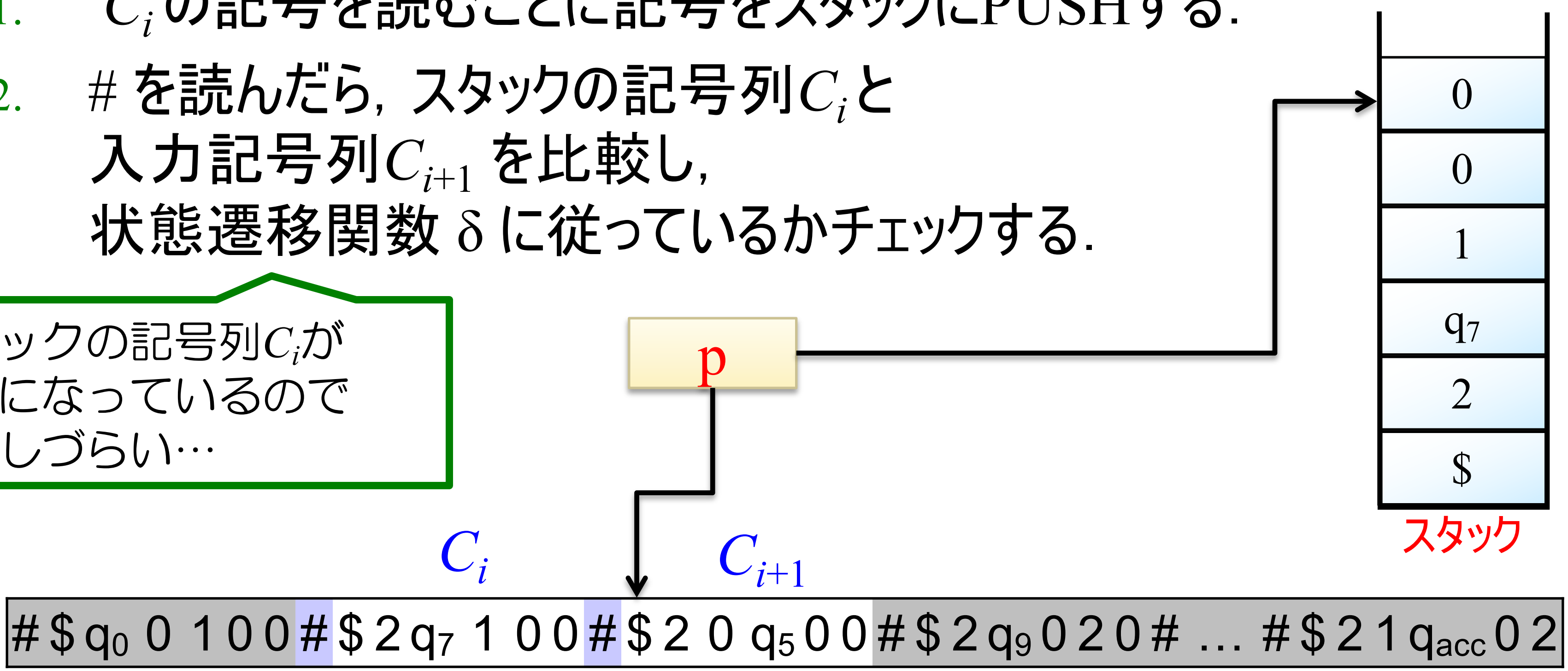
C_{i+1} # $ 2 $\boxed{q_9\ 0\ 2}$ 0

$\delta(q_5,0)=(q_9,2,L)$

B-3の判定を行うPDA

- 非決定的に動いて，$C_i \vdash_M C_{i+1}$ が成立しないような整数 i $(0 \le i \le m-1)$ を推測(guess)する.
- 入力の一部である $C_i \# C_{i+1}$ に対して次のように動作.
  1. C_i の記号を読むごとに記号をスタックにPUSHする.
  2. # を読んだら，スタックの記号列 C_i と入力記号列 C_{i+1} を比較し，状態遷移関数 δ に従っているかチェックする.

スタックの記号列C_iが
逆順になっているので
比較しづらい…



B-3の判定を行うPDA（改）

x^{R}は文字列xの
左右を反転させた文字列

- 計算履歴C_0, C_1, C_2, … が
#C_0^{R}#C_1#C_2^{R}#…と表現されているものと仮定.
  - i が偶数のとき：
    - 入力テープではC_i^{R}#C_{i+1}.
    - # を読んだ時点で，スタックにC_i，入力テープに C_{i+1}.
  - i が奇数のとき：
    - 入力テープではC_i#C_{i+1}^{R}.
    - # を読んだ時点で，スタックにC_i^{R}，入力テープに C_{i+1}^{R}.
- それぞれの場合について，B-3の判定ができるように
PDAの状態遷移規則を<u>適切に</u>定める.