

計算可能性理論

Computability Theory

9. 判定不可能な言語

本日の内容

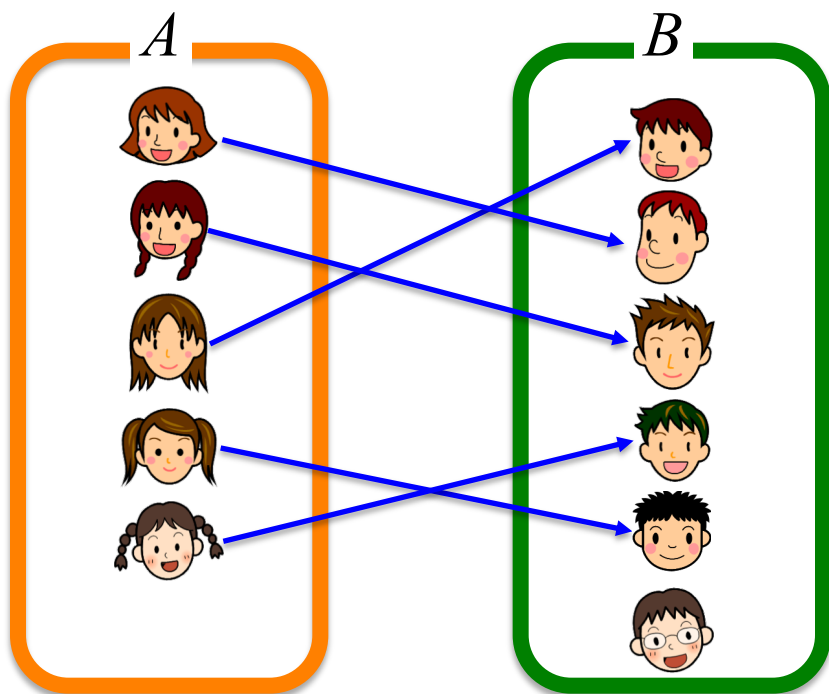
- 準備: 可算と非可算.
- Turing認識不可能な言語が存在.
- A_{DTM} は判定不可能.
- A_{DTM} の補集合はTuring認識不可能.

準備：可算と非可算

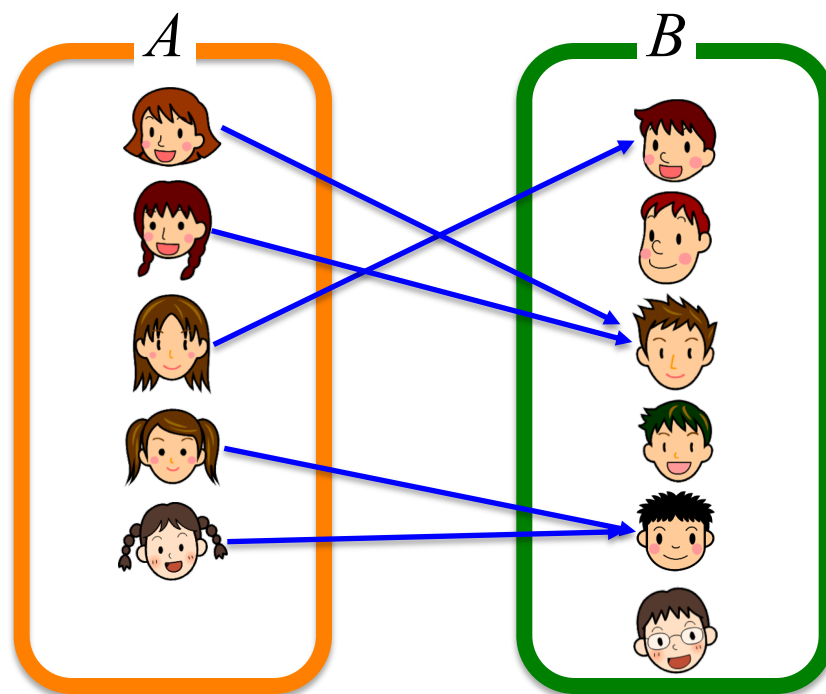
単射(one-to-one)

【定義】写像 $f: A \rightarrow B$ が**単射**であるとは、次が成り立つときをいう。

すべての $a, b \in A$ に対し, $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$



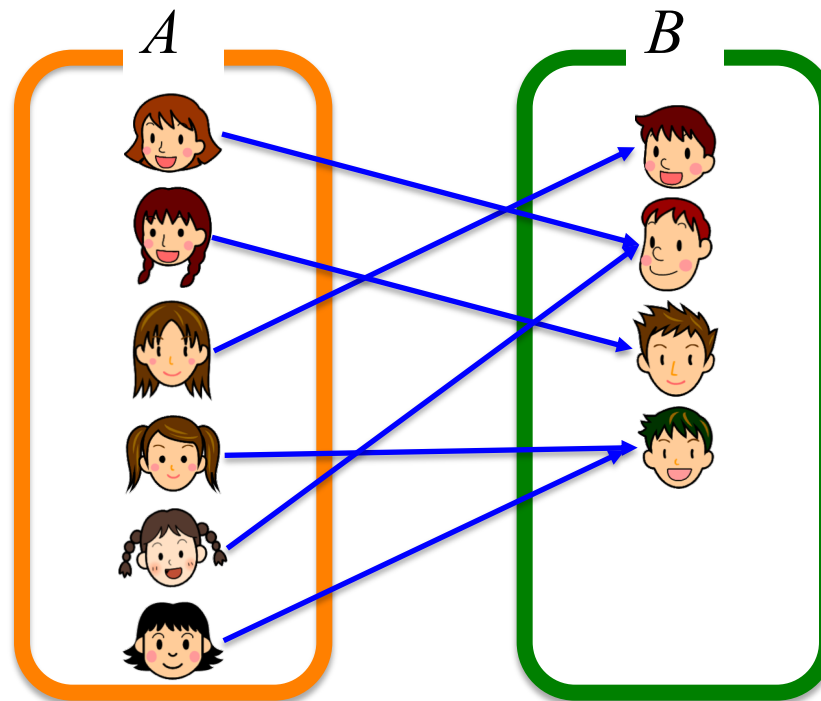
単射である



単射でない

鳩の巣原理はこう書ける

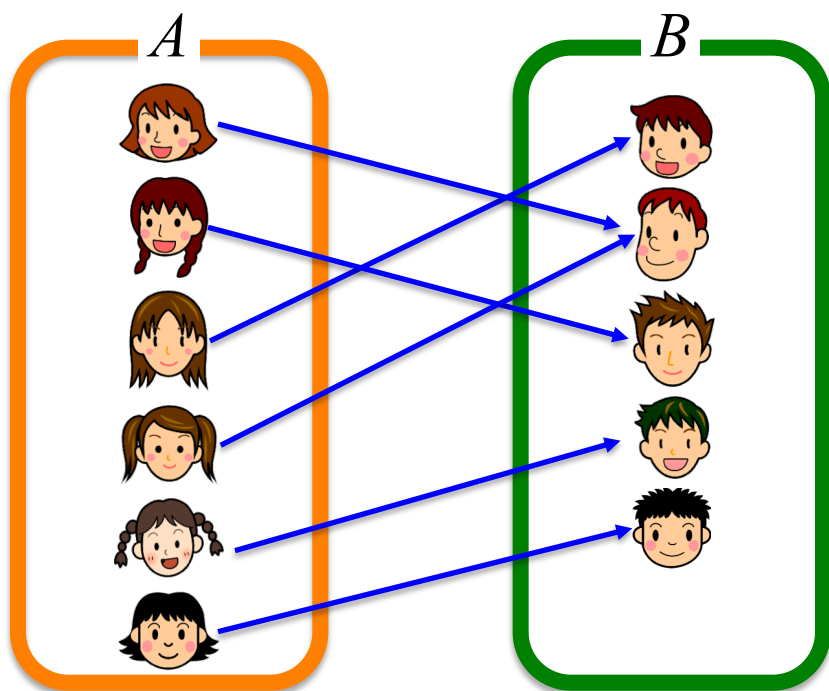
【命題】 有限集合 A, B が $|A| > |B|$ を満たすとき, 任意の写像 $f: A \rightarrow B$ は単射ではない.



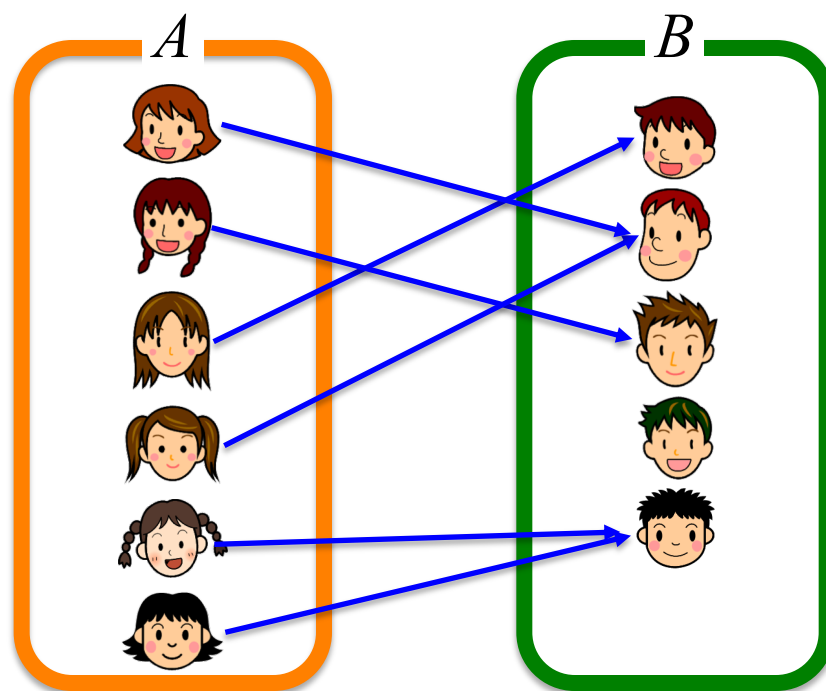
全射(onto)

【定義】 写像 $f: A \rightarrow B$ が**全射**であるとは、次が成り立つときをいう。

すべての $b \in B$ に対し、ある $a \in A$ が存在して $f(a) = b$



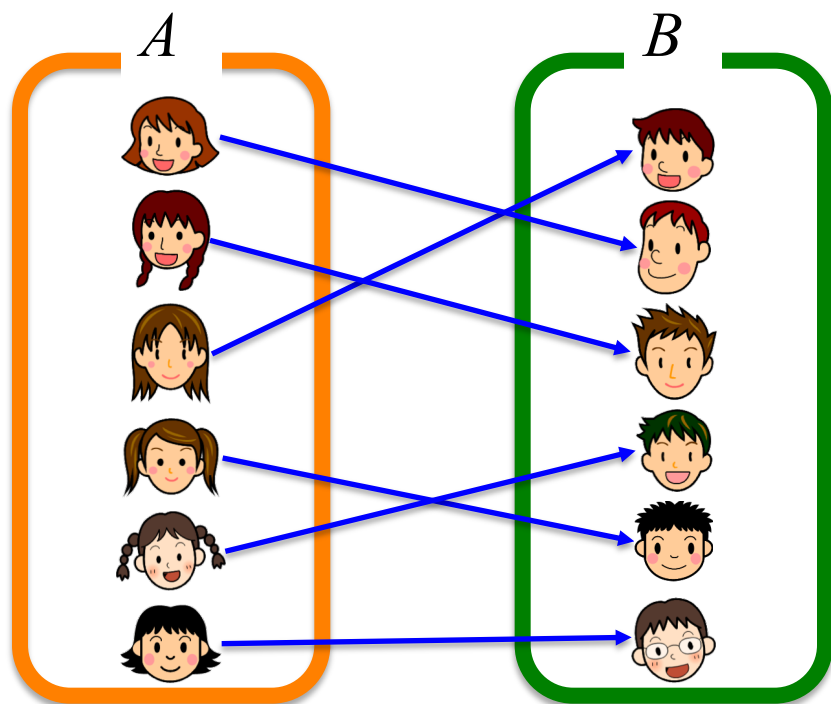
全射である



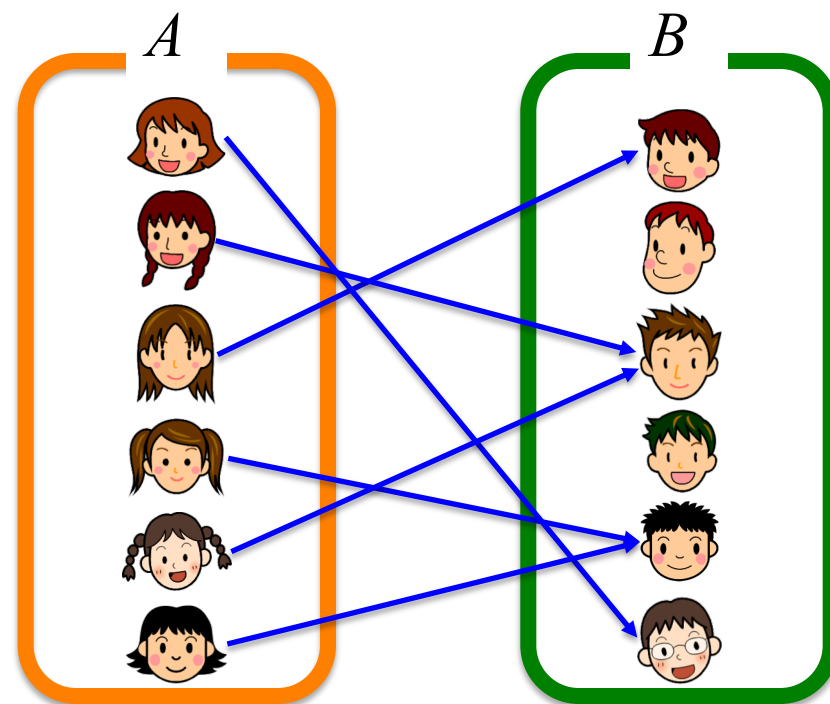
全射でない

全単射(one-to-one and onto)

【定義】写像 $f: A \rightarrow B$ が**全単射**であるとは、 f が単射かつ全射であるときをいう。



全単射である



全単射でない

集合のサイズと全単射

【命題】 任意の有限集合 A, B に対して, 以下が成り立つ.
全単射 $f: A \rightarrow B$ が存在する $\Leftrightarrow |A|=|B|$.

【系】 任意の有限集合 A, B に対して, 以下が成り立つ.
 $A \subsetneq B$ または $B \subsetneq A \Rightarrow$ 全単射 $f: A \rightarrow B$ が存在しない.

集合の「サイズ」の一般化：集合の濃度

【定義】 集合 A, B が**同じ濃度をもつ**とは、 A から B への全単射が存在するときをいう。

例

- 正の偶数全体の集合 $\mathbf{E} = \{2, 4, 6, \dots\}$ は
自然数全体の集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と同じ濃度をもつ。 $\therefore$
 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{E}$ を $f(n) = 2n$ と定めると f は全単射。

A が B の真の部分集合であっても
 A, B が同じ濃度であることがありうる！

可算集合

【定義】 集合 A が**可算**であるとは, A が有限集合であるか, A が自然数全体の集合 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と同じ濃度をもつときをいう.

例

【命題】 自然数全体の集合 $\mathbf{N}$ は可算である.

【命題】 整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ は可算である.

【命題】 有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は可算である.

Σ^* は可算集合

【補題9.1】 任意のアルファベット Σ に対して
 Σ^* は可算である.

- ∴ Σ^* の文字列を長さに関する昇順に並べる.
長さの同じ文字列については辞書式順序を用いて
順序付けすればよい.

非可算集合

【定義】 集合 A が **非可算** であるとは, A が可算でないときをいう.

例

【命題】 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ は非可算である.

【命題】 実数の集合 $[0,1]$ は非可算である.

無限2進文字列全体の集合は非可算

【補題9.2】 無限2進文字列全体の集合 **B** は非可算である.

補題9.2の証明

- 背理法による. **B**が可算であると仮定すると, 全単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{B}$ が存在する.
- 無限2進文字列 x の j 文字目を $x[j]$ で表す. いま, 無限2進文字列 y を次で定める.

$$y[j] = \begin{cases} 0, & \text{if } f(j)[j] = 1 \\ 1, & \text{if } f(j)[j] = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

- $y \in \mathbf{B}$ より, $f(n) = y$ となる $n \in \mathbf{N}$ が存在するが, $y[n] = 1 \Rightarrow y[n] = 0$ となり矛盾. よって, **B** は非可算.

(証明終)

Σ 上の言語全体の集合は非可算

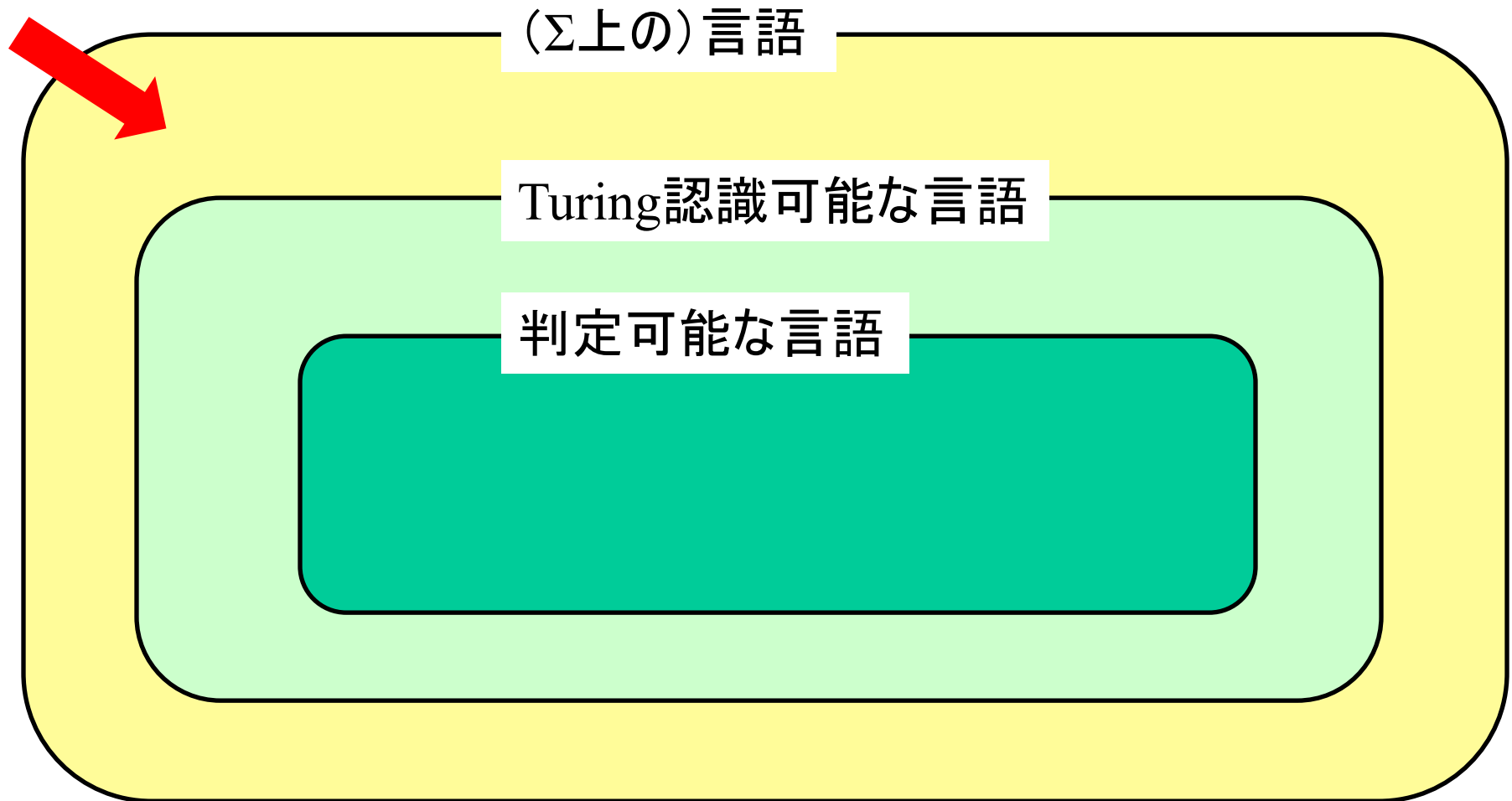
【補題9.3】 Σ 上の言語全体の集合 2^{Σ^*} は非可算である

- 補題9.1より Σ^* は可算であるから,
 Σ^* の要素を $s_1, s_2, \dots$ とする.
- 写像 $f: 2^{\Sigma^*} \rightarrow \mathbf{B}$ を次で定める.
$$f(L)[i] = 1 \iff s_i \in L \quad (L \in 2^{\Sigma^*}; i=1, 2, \dots)$$
- 写像 f は全単射である.
- 補題9.2より $\mathbf{B}$ は非可算であるから,
 2^{Σ^*} も非可算となる.

(証明終)

Turing認識不可能な言語が存在

言語のクラスの階層



Turing機械全体の集合は可算

【補題9.4】 Σ を入力アルファベットとする DTM全体の集合 $\mathbf{TM}_{\Sigma}$ は可算である.

- 各 $M \in \mathbf{TM}_{\Sigma}$ は $\{0,1\}$ 上の文字列として符号化できる.
- 補題9.1より $\{0,1\}^*$ は可算である.
- よって, $\mathbf{TM}_{\Sigma}$ は可算である.

(証明終)

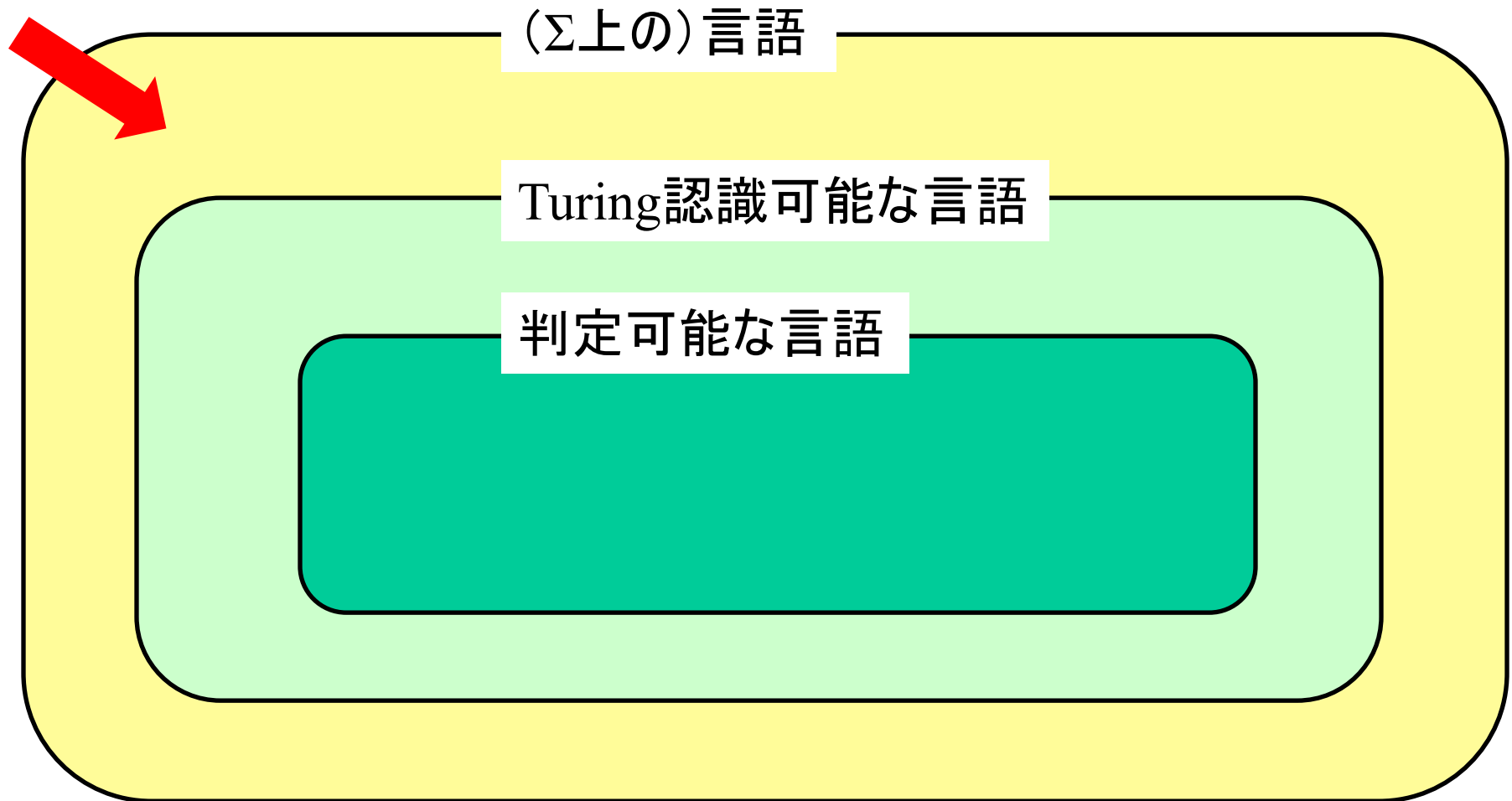
Turing認識不可能な言語の存在

【定理9.1】 Turing認識可能でない言語が存在する.

- Σ 上のすべての言語はTuring認識可能であると仮定.
- このとき, $\mathbf{TM}_\Sigma$ から 2^{Σ^*} への全射が存在する.
- 補題9.4より $\mathbf{TM}_\Sigma$ は可算であり, 補題9.3より 2^{Σ^*} は非可算である.
- これは, $\mathbf{TM}_\Sigma$ から 2^{Σ^*} への全射が存在することと矛盾する.

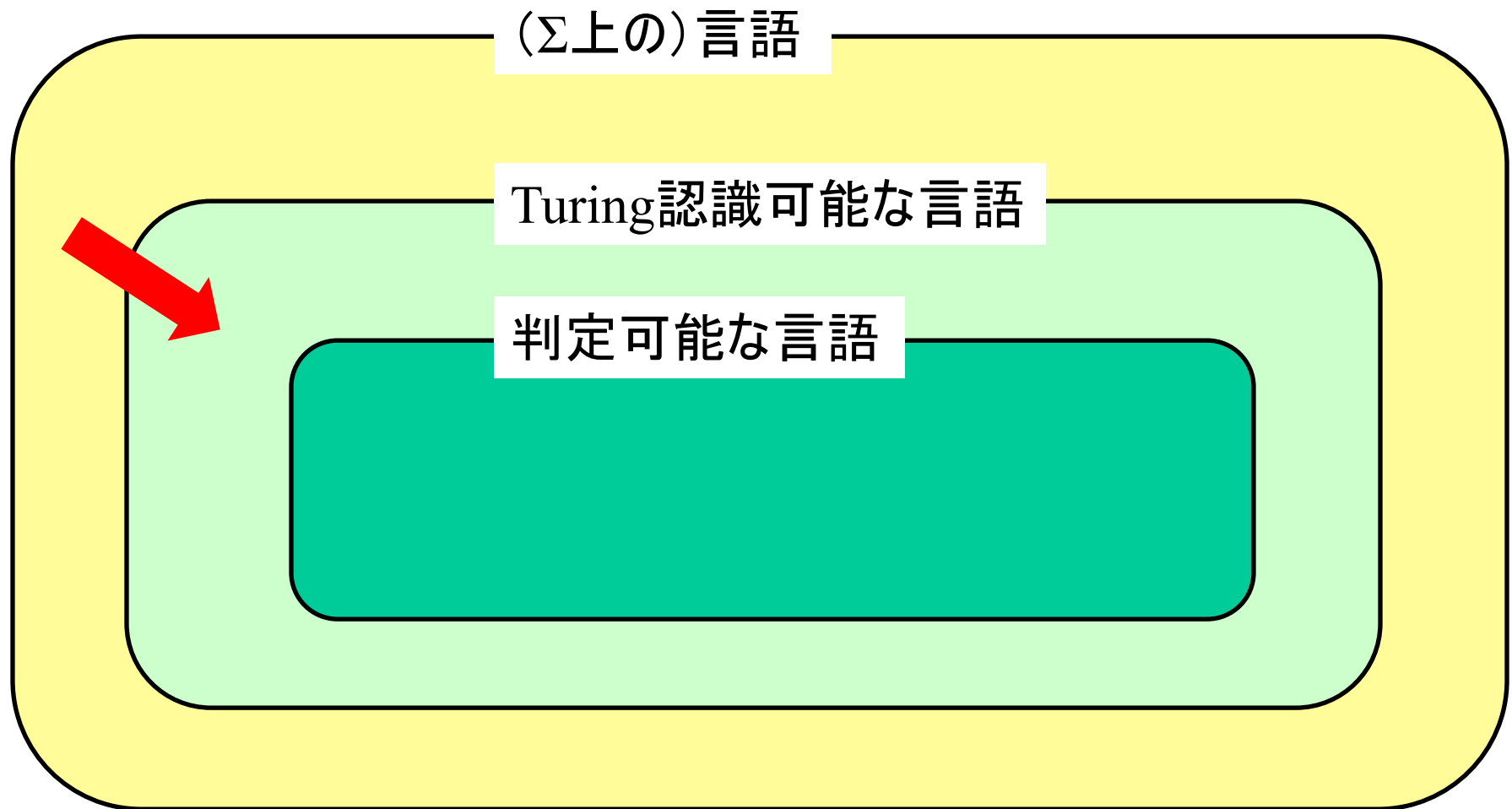
(証明終)

言語のクラスの階層



A_{DTM} は判定不可能

言語のクラスの階層



受理問題の判定不可能性

【定義】 $A_{\text{DTM}} = \{ \langle M, w \rangle \mid \text{DTM } M \text{ は入力 } w \text{ を受理する} \}$

- A_{DTM} が Turing 認識可能であることは,
 M を模倣するDTMをつくることで証明できる.

【定理9.2】 A_{DTM} は判定不可能である.

定理9.2の証明

- A_{DTM} が判定可能であると仮定する.
- H を A_{DTM} を判定する DTM とする.
すなわち,

$$H(\langle M, w \rangle) = \begin{cases} \text{受理} & M \text{ が } w \text{ を受理する場合} \\ \text{拒否} & M \text{ が } w \text{ を受理しない場合} \end{cases}$$

定理9.2の証明

- H をサブルーチンとするDTM D をつくる.

$D =$ “入力 $\langle M \rangle$ に対して (M はDTM):

1. 入力 $\langle M, \langle M \rangle \rangle$ に対して, H を動作させる.
2. H が受理するならば拒否し, 拒否するならば受理する. ”

$$D(\langle M \rangle) = \begin{cases} \text{受理} & M \text{ が } \langle M \rangle \text{ を受理しない場合} \\ \text{拒否} & M \text{ が } \langle M \rangle \text{ を受理する場合} \end{cases}$$

定理9.2の証明(続き)

- D に D 自身の符号化 $\langle D \rangle$ を入力として与えると,

$$D(\langle D \rangle) = \begin{cases} \text{受理} & D \text{ が } \langle D \rangle \text{ を受理しない場合} \\ \text{拒否} & D \text{ が } \langle D \rangle \text{ を受理する場合} \end{cases}$$

- これは矛盾である.
よって, A_{DTM} を判定するDTM H は存在しない.

(証明終)

補足: DTM M_i に $\langle M_j \rangle$ を入力したときの結果

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	
M_1	受理	拒否	停止しない	受理	
M_2	停止しない	受理	停止しない	拒否	
M_3	停止しない	受理	拒否	受理	
M_4	受理	拒否	受理	停止しない	
$\vdots$					

補足: H に $\langle M_i, \langle M_j \rangle \rangle$ を入力したときの結果

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	
M_1	受理	拒否	拒否	受理	
M_2	拒否	受理	拒否	拒否	
M_3	拒否	受理	拒否	受理	
M_4	受理	拒否	受理	拒否	
$\vdots$					

補足: H に $\langle M_i, \langle M_i \rangle \rangle$ を入力したときの結果

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	
M_1	受理				
M_2		受理			
M_3			拒否		
M_4				拒否	
$\vdots$					

補足: D に $\langle M_i \rangle$ を入力したときの結果

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	$\langle M_3 \rangle$	$\langle M_4 \rangle$	
M_1	拒否				
M_2		拒否			
M_3			受理		
M_4				受理	
$\vdots$					

補足: D 自身もこの表に現われる

	$\langle M_1 \rangle$	$\langle M_2 \rangle$	...	$\langle D \rangle$
M_1	拒否			
M_2		拒否		
$\vdots$			$\ddots$	
D				受理

D が $\langle D \rangle$ を受理する $\Rightarrow$ D が $\langle D \rangle$ を拒否する. 矛盾.

A_{DTM} は判定不可能である

言語のクラスの階層

(Σ 上の) 言語

Turing認識可能な言語

▪ A_{DTM}

判定可能な言語

A_{DTM} の補集合は
Turing認識不可能

A_{DTM} の補集合

【定理9.3】 任意の言語 L に対し, 以下は等価である.

- L は判定可能.
- L と L の補集合は Turing 認識可能.

【系】 言語 A_{DTM} の補集合はTuring認識不可能である.

言語のクラスの階層

(Σ 上の)言語

▪ A_{DTM} の補集合

Turing認識可能な言語

▪ A_{DTM}

判定可能な言語

