Kyushu University 100th 2011
知の新世紀を拓く

計算可能性理論

Computability Theory

8．正規言語に関連する判定可能な言語

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

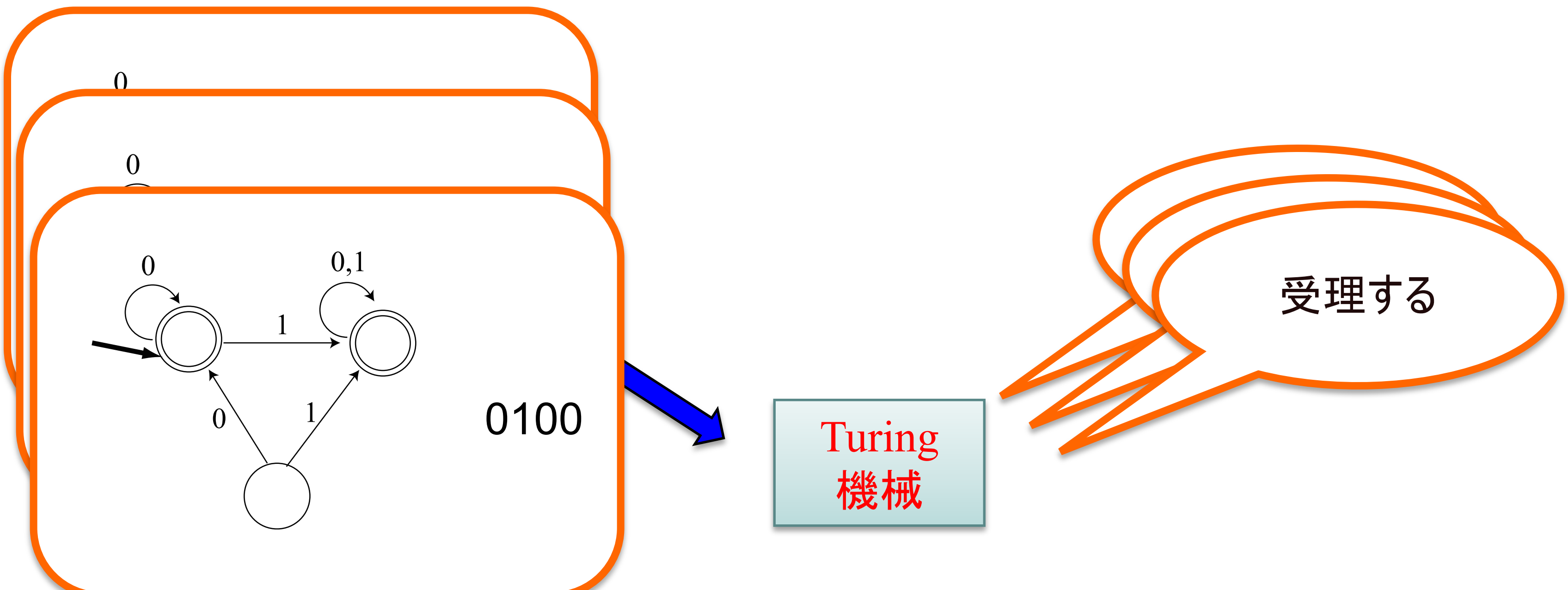
本日の内容

- DFAに対する受理問題
- NFAに対する受理問題
- 正規表現照合問題
- DFAの空性判定問題
- DFAの等価性判定問題
- まとめと次回以降の予告

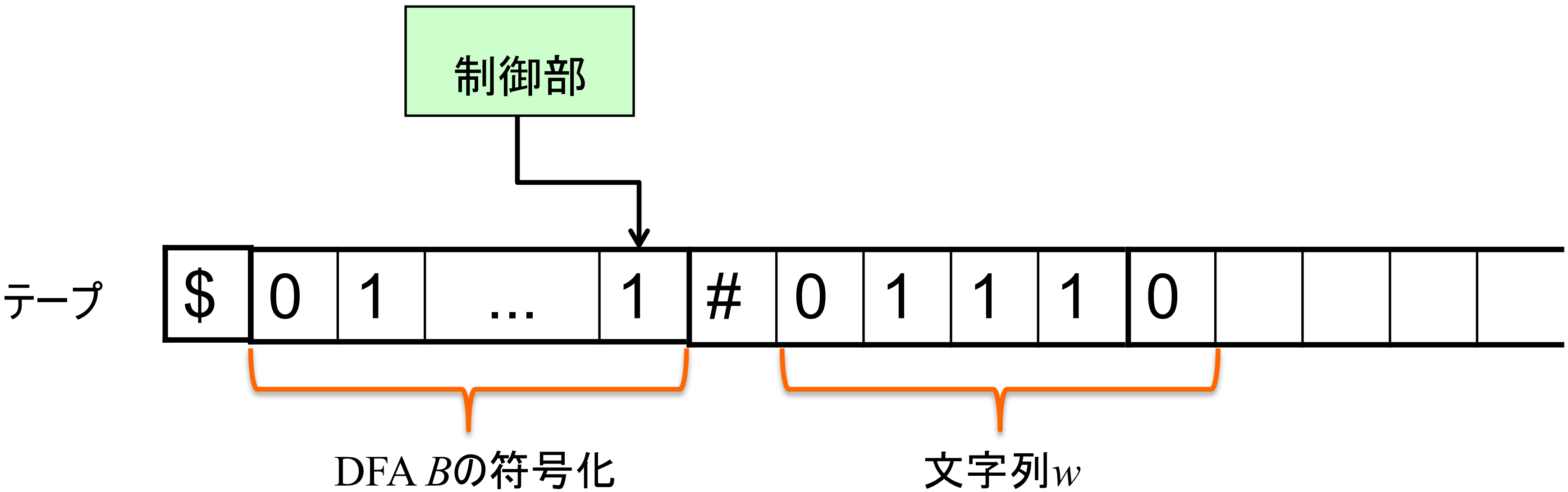
DFAに対する受理問題

DFAに対する受理問題

- DFA Bと文字列wの対$<B,w>$を受け取り，Bがwを受理するかどうかを判定.



DFAに対する受理問題：言語の判定として



Bの5つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ のリスト

【定義】 $A_{\mathrm{DFA}} = \{ \langle B, w \rangle \mid$ DFA Bは入力wを受理する$\}$

【定理8.1】 A_{DFA}は判定可能である.

定理8.1の証明

- 次の DTM M が A_{DFA} を判定する.

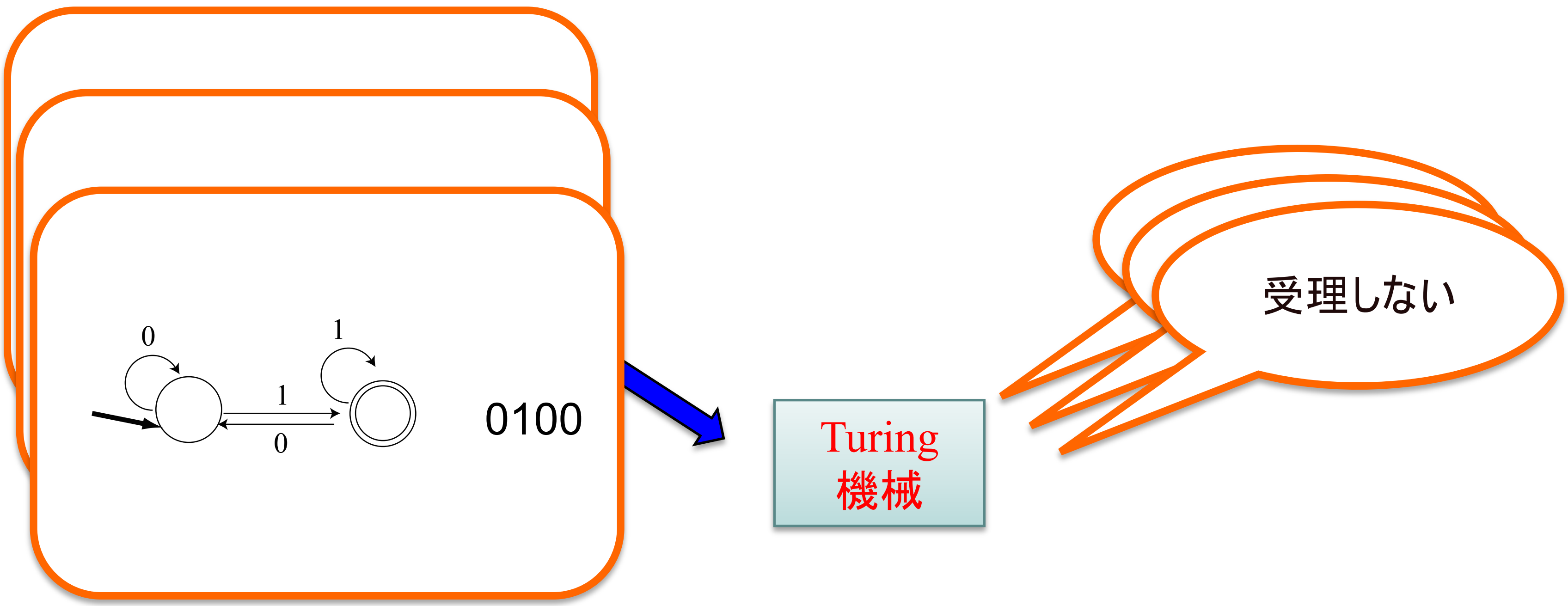
M=“入力<B,w>に対して:

1. <B,w> が DFAと文字列 w を正しく表現しているかを検査する. 検査に合格しなければ拒否する.
2. 入力 w に対する DFA B の動作を模倣する.
3. 模倣が受理状態で終わったら受理し, 非受理状態で終わったら拒否する. ”

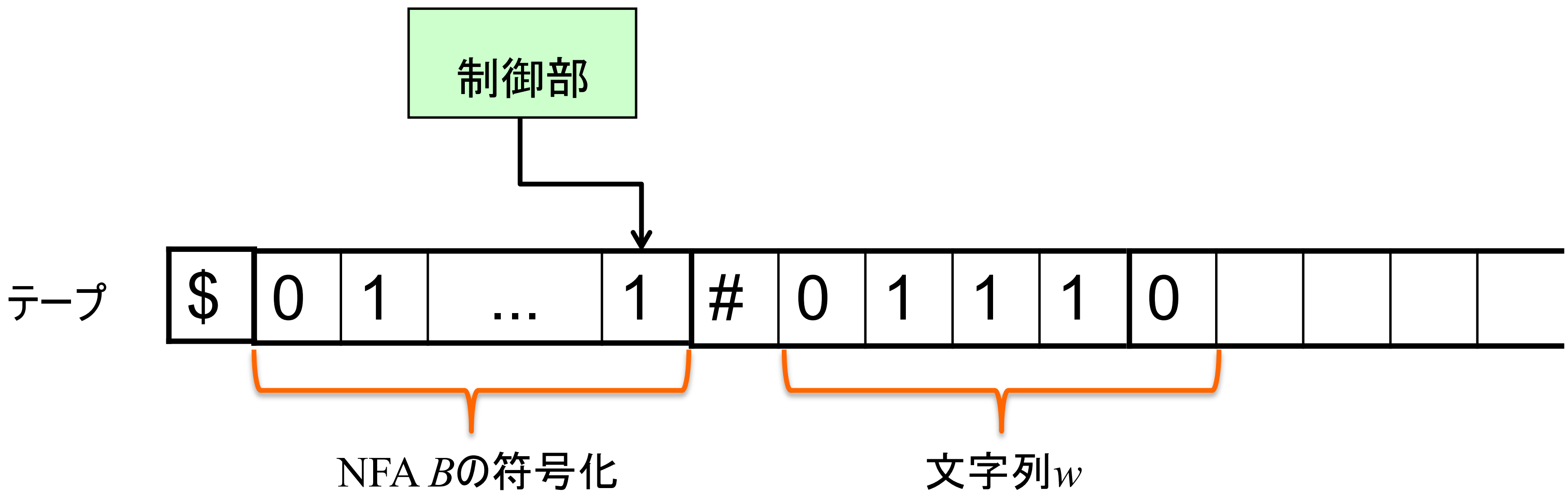
NFAに対する受理問題

NFAに対する受理問題

- NFA Bと文字列wの対$<B,w>$を受け取り，Bがwを受理するかどうかを判定．



NFAに対する受理問題：言語の判定として



Bの5つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ のリスト

【定義】 $A_{\mathrm{NFA}} = \{ \langle B, w \rangle \mid$ NFA Bは入力wを受理する$\}$

【定理8.2】 A_{NFA}は判定可能である.

定理8.2の証明

- 次の DTM N が A_{NFA}を判定する.

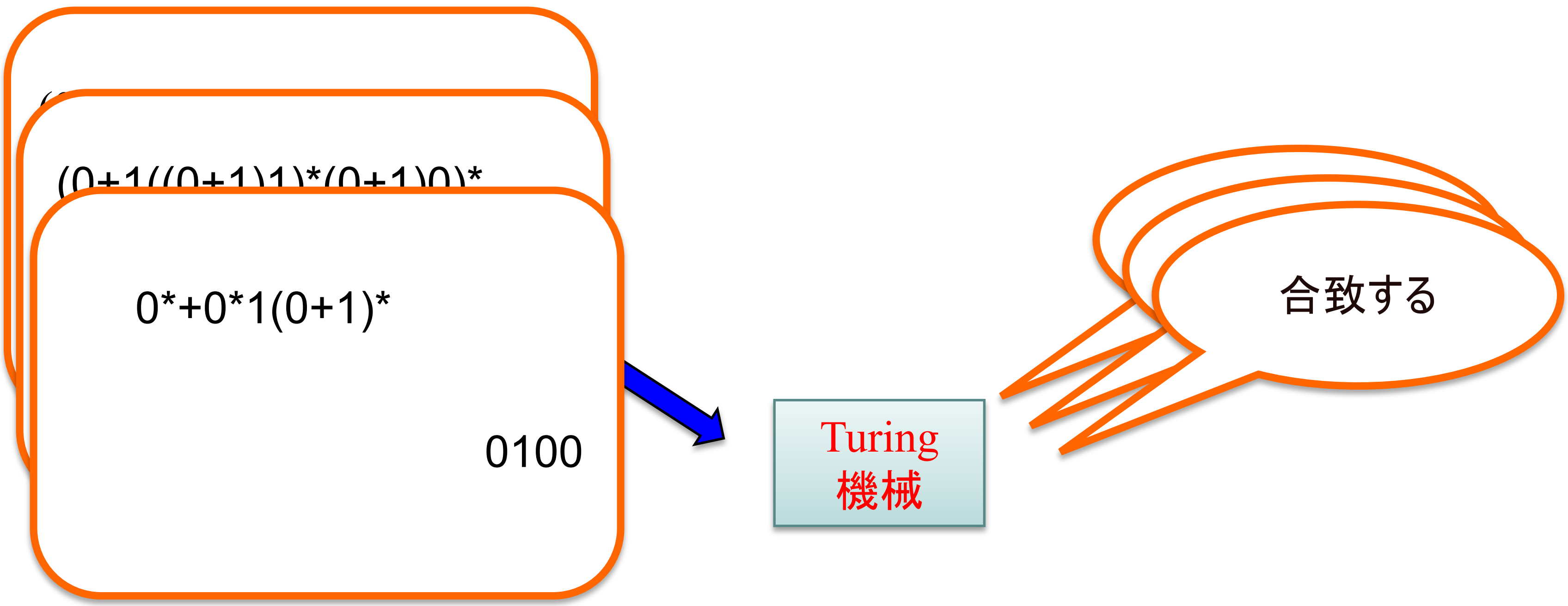
N="入力$\langle B, w\rangle$に対して:

1. $\langle B,w\rangle$ が NFAと文字列 w を正しく表現しているかを検査する. 検査に合格しなければ拒否する.
2. NFA B をそれと等価な DFA C に変換する.
3. 入力 $\langle C, w\rangle$ に対して, A_{DFA}を判定する DTM M を動作させる.
4. M が受理すれば受理し, 拒否すれば拒否する. "

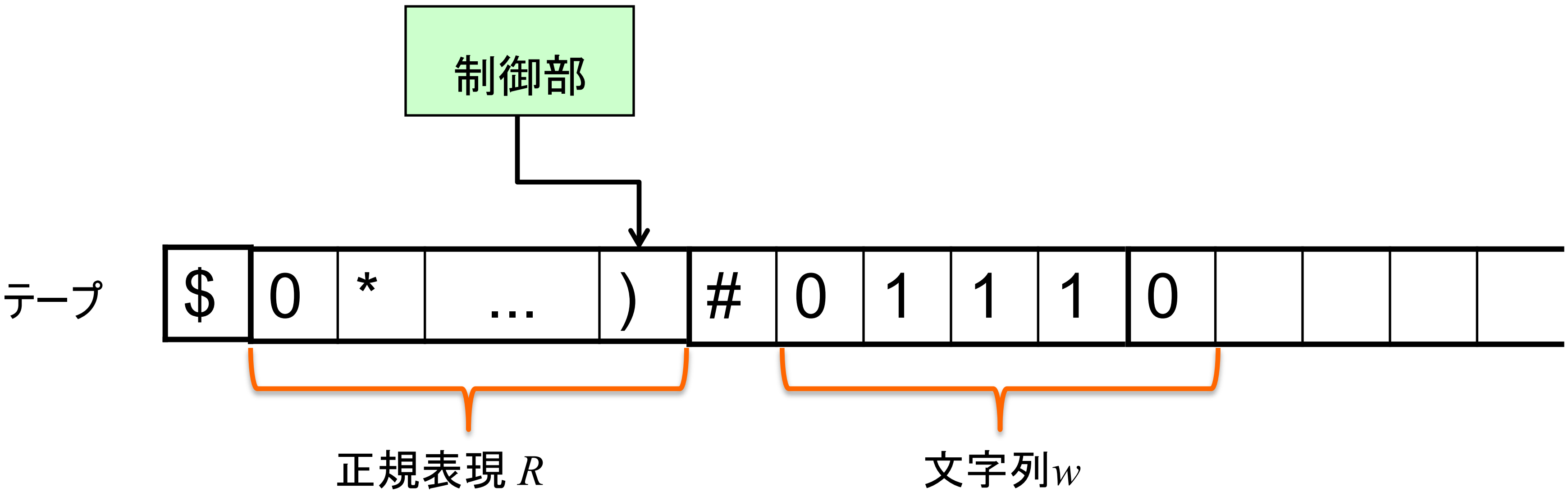
正規表現照合問題

正規表現照合問題

- 正規表現 Rと文字列wの対$<R, w>$を受け取り, Rがwに合致するかどうかを判定.



正規表現照合問題：言語の判定として



【定義】$A_{\mathrm{REX}}=\{ \langle R,w\rangle \mid$ 正規表現Rは入力wに合致する$\}$

【定理8.3】A_{REX}は判定可能である.

定理8.3の証明

- 次の DTM P が A_{REX} を判定する.

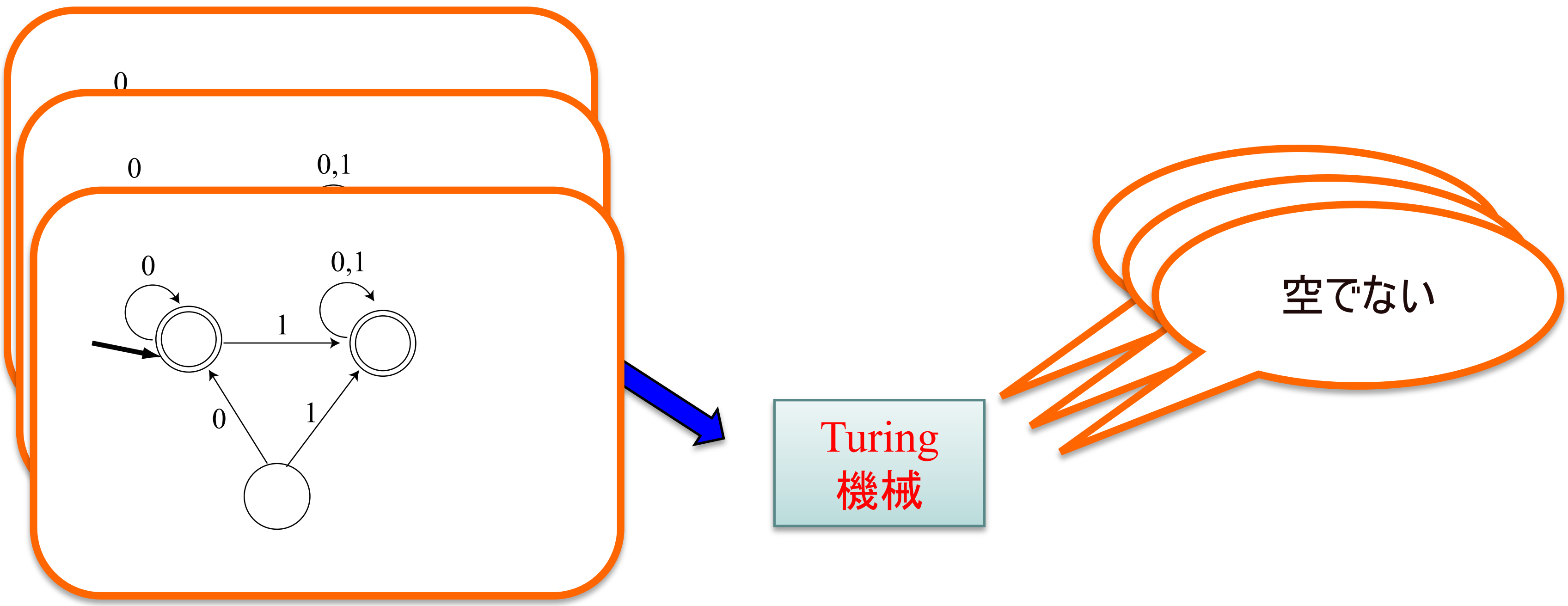
P=“入力 $\langle R, w\rangle$ に対して:

1. $\langle R, w\rangle$ が正規表現と文字列 w を正しく表現しているか検査する. 検査に合格しなければ拒否する.
2. 正規表現 R をそれと等価な DFA B に変換する.
3. 入力 $\langle B, w\rangle$ に対して, A_{DFA}を判定するDTM M を動作させる.
4. M が受理すれば受理し, 拒否すれば拒否する. ”

DFAの空性判定問題

DFAの空性判定

- DFA Bを受け取り，Bが認識する言語$L(B)$が空であるかどうかを判定．



DFAの空性判定：言語の判定として

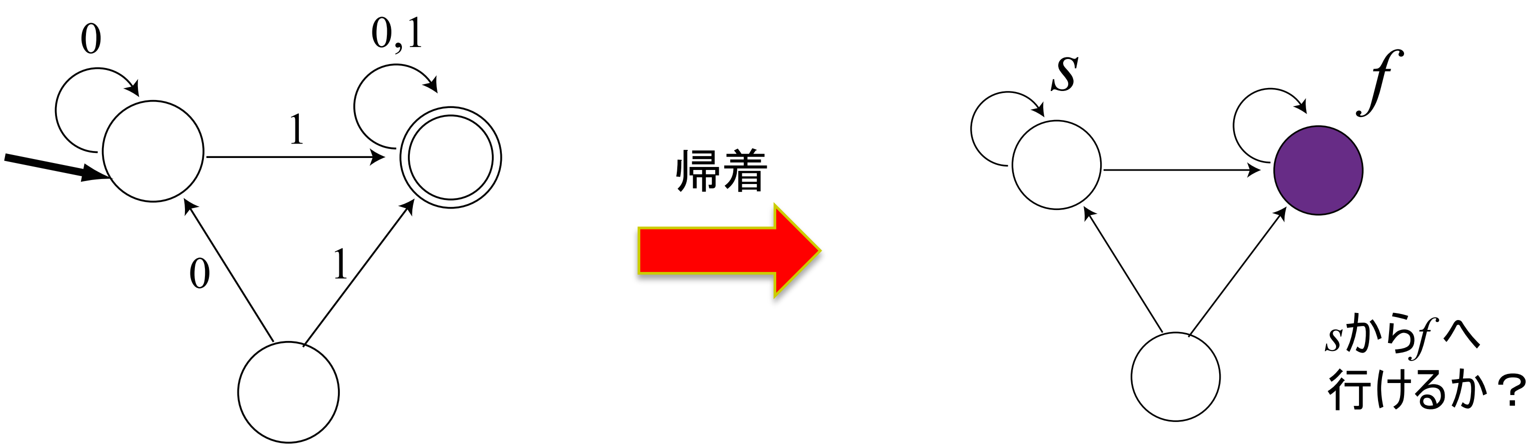
【定義】 $E_{\mathrm{DFA}}=\{ \langle B \rangle \mid \text{DFA } B$は $L(B)=\emptyset$ を満たす$\}$

【定理8.4】 E_{DFA}は判定可能である.

定理8.4の証明：アイデア

- 全ての入力文字列 $w \in \Sigma^*$ について，DFA B が w を受理するかどうかを検査することは不可能.
- 有向グラフの到達可能性問題へ帰着して判定.

【命題】任意の DFA $B=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し次が成り立つ.
$L(B) \neq \emptyset \iff q \in F$ が存在して q_0 から q へ到達可能



補足

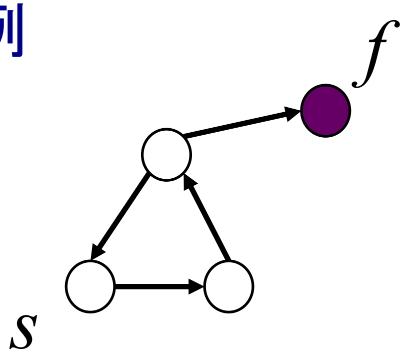
有向グラフの到達可能性問題

【定義】(有向グラフの到達可能性問題).

入力: 有向グラフ$G=(V, E)$, 頂点$s, f \in V$.

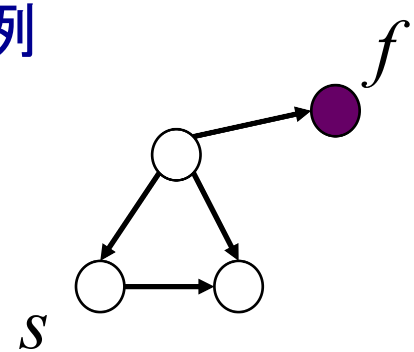
出力: sからfへ至る経路があれば Yes, なければ No.

例



Yes

例

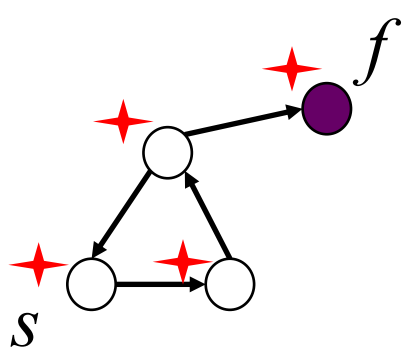


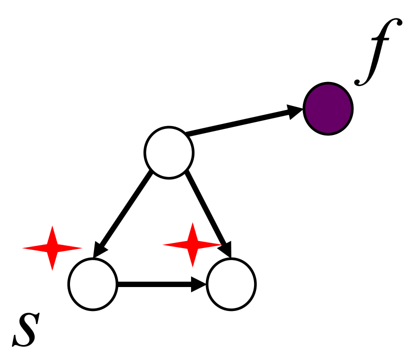
No

補足

到達可能性判定アルゴリズム

1. 頂点 s に印を付ける.
2. 新しく印を付けられる状態がなくなるまで次を繰り返す.
   - 既に印の付いた頂点から有向辺で繋がっている頂点すべてに印を付ける.
3. 頂点 f に印が付いていれば到達可能, そうでなければ到達不能.





補足

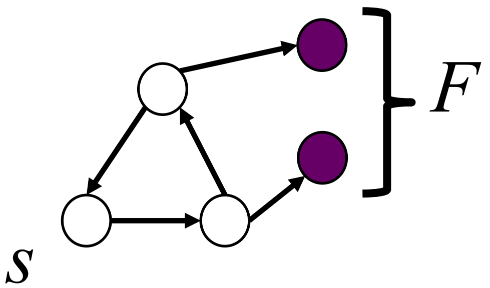
有向グラフの到達可能性問題2

定義（有向グラフの到達可能性問題2）.

入力： 有向グラフ $G=(V, E)$，頂点 $s\in V$, <u>頂点集合 $F\subseteq V$</u>.

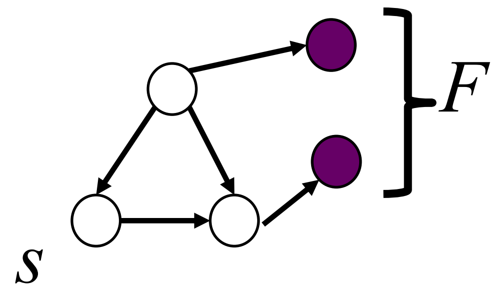
出力： <u>ある頂点 $f\in F$ に対して</u> s から f へ至る経路があるならばYes，なければNo.

例



Yes

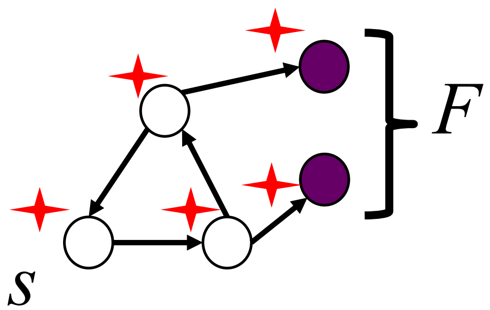
例

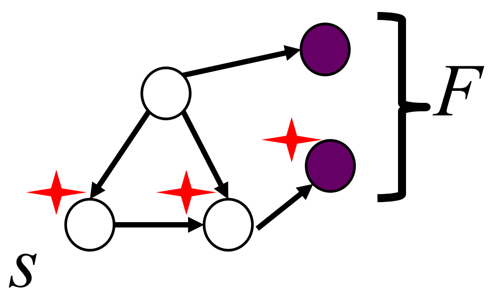


Yes

補足 到達可能性判定アルゴリズム2

1. 頂点 s に印を付ける.
2. 新しく印を付けられる状態がなくなるまで次を繰り返す.
   - 既に印の付いた頂点から有向辺で繋がっている頂点すべてに印を付ける.
3. F のいずれかの頂点に印が付いていれば到達可能, そうでなければ到達不能.





定理8.4の証明

- 次のDTM MがE_{DFA}を判定する.

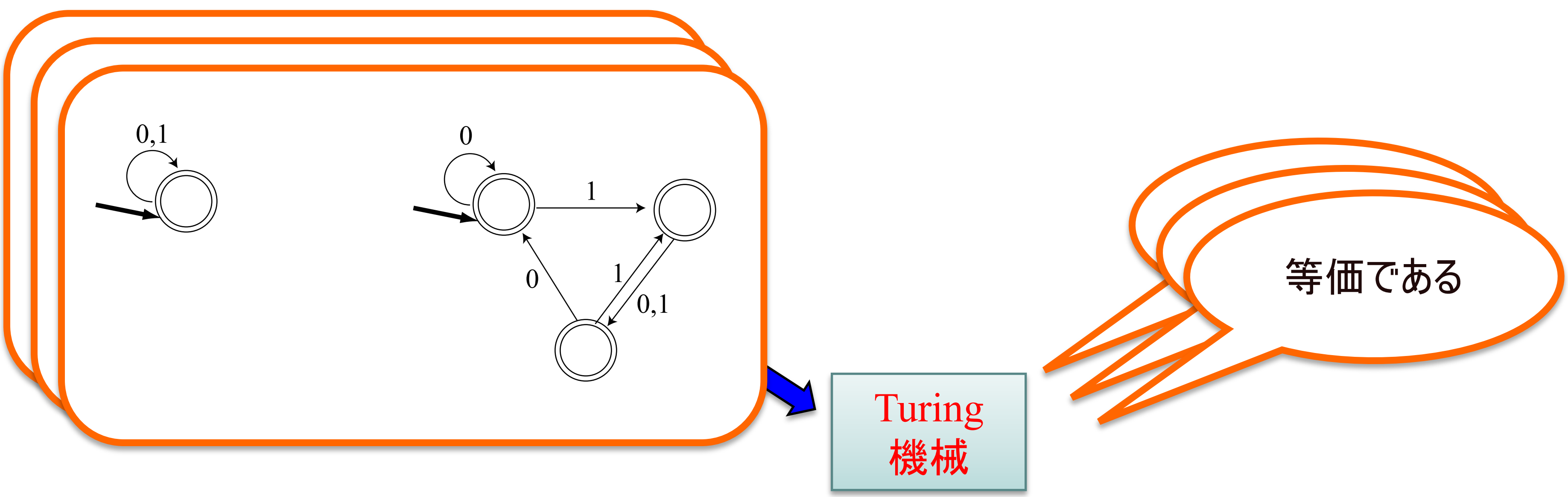
M=“入力<B>に対して:

1. Bの開始状態に印を付ける.
2. 新しく印を付けられる状態がなくなるまで次の動作を繰り返す.
   - 既に印の付いた状態から1回の遷移で進める全ての状態に印を付ける.
3. 受理状態に印が付いていれば拒否し,
   印が付いていなければ受理する. ”

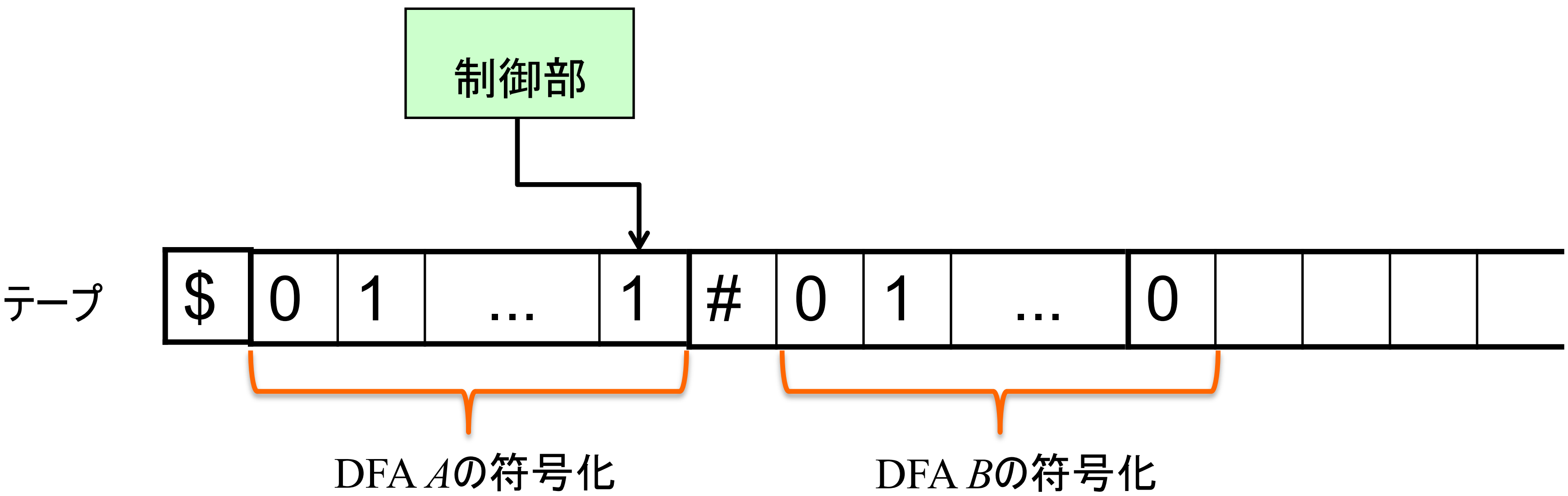
DFAの等価性判定問題

DFAの等価性判定

- DFA の対<A, B>を受け取り，AとBが等価であるか否かを判定．



DFAの等価性判定：言語の判定として

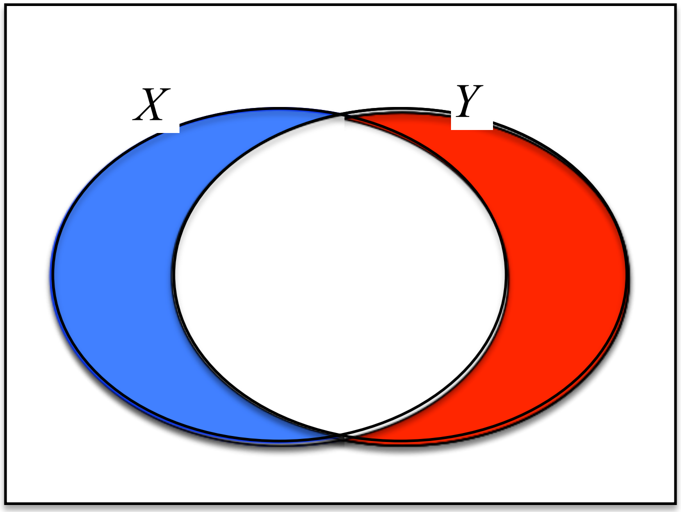


【定義】 $EQ_{\mathrm{DFA}}=\{ \langle A, B\rangle \mid \text{DFA } A, B$ は $L(A)=L(B)$ を満たす$\}$

【定理8.5】 EQ_{DFA}は判定可能である.

補足 集合の対称差

- 任意の集合X, Yに対し，集合
  $X \triangle Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y)$
  をX, Yの対称差とよぶ．
- $X = Y \Leftrightarrow X \triangle Y = \emptyset$



【定理】正規言語の集まりは演算$\cup$, $\cap$, ^{c} に関して閉じている．

【系】2つの正規言語の対称差は正規言語である．

【命題】$EQ_{\mathrm{DFA}} = \{ \langle A, B \rangle \mid$ DFA A, Bは$L(A) \triangle L(B) = \emptyset$ を満たす$\}$

定理8.5の証明

- 次の DTM Q が EQ_{DFA} を判定する.

Q=“入力 $\langle A,B\rangle$ に対して:

1. $L(A)\triangle L(B)$ を認識する DFA C の符号化 $\langle C\rangle$ をつくる.
2. $\langle C\rangle$ を入力として, E_{DFA} を判定するDTM M を動作させる.
3. M が受理すれば**受理**し, 拒否すれば**拒否**する. ”

まとめと次回以降の予告

本日のまとめ

- 以下の言語は判定可能である.

$A_{\mathrm{DFA}}=\{ \langle B,w\rangle \mid$ DFA Bは入力wを受理する$\}$

$EQ_{\mathrm{DFA}}=\{ \langle A, B\rangle \mid$ DFA A, Bは$L(A)=L(B)$を満たす$\}$

次回以降の予告

- 以下の言語は判定不可能である.

A_{DTM}={ <M, w>| Mは入力wを受理するDTM }

EQ_{DTM}={ <A, B>| A, Bは$L(A)=L(B)$を満たすDTM }

$HALT_{\mathrm{DTM}}$={ <M, w>| Mは入力wに対し停止するDTM }