KYUSHU UNIVERSITY 100th 2011
知の新世紀を拓く

計算可能性理論

Computability Theory

5．非決定性Turing機械

九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

本日の内容

- 復習:非決定性有限オートマトン
- 非決定性Turing機械
- 非決定性Turing機械の動作を模倣する
- 非決定性Turing機械による言語の「認識」「判定」

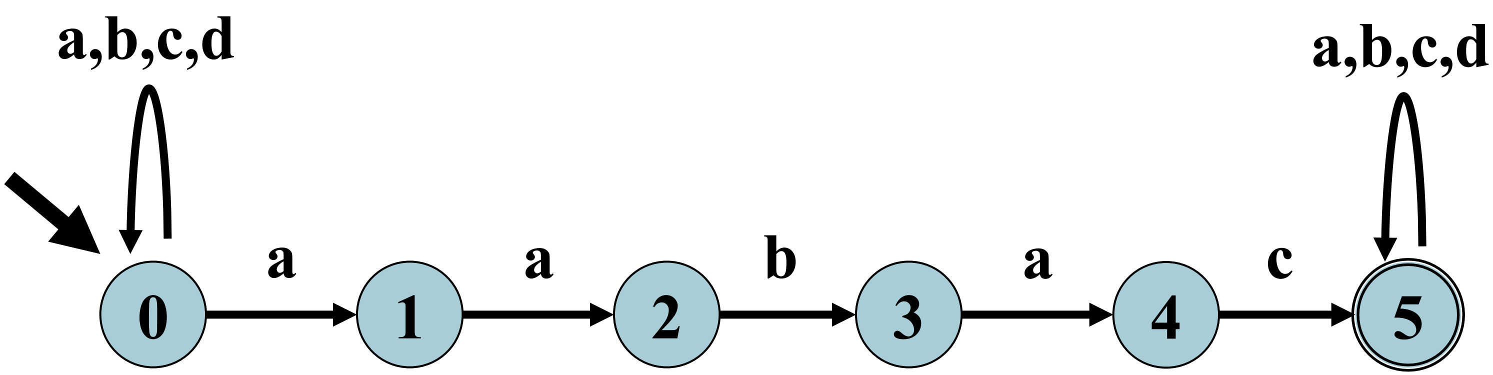
復習
非決定性有限オートマトン

非決定性有限オートマトン(NFA)

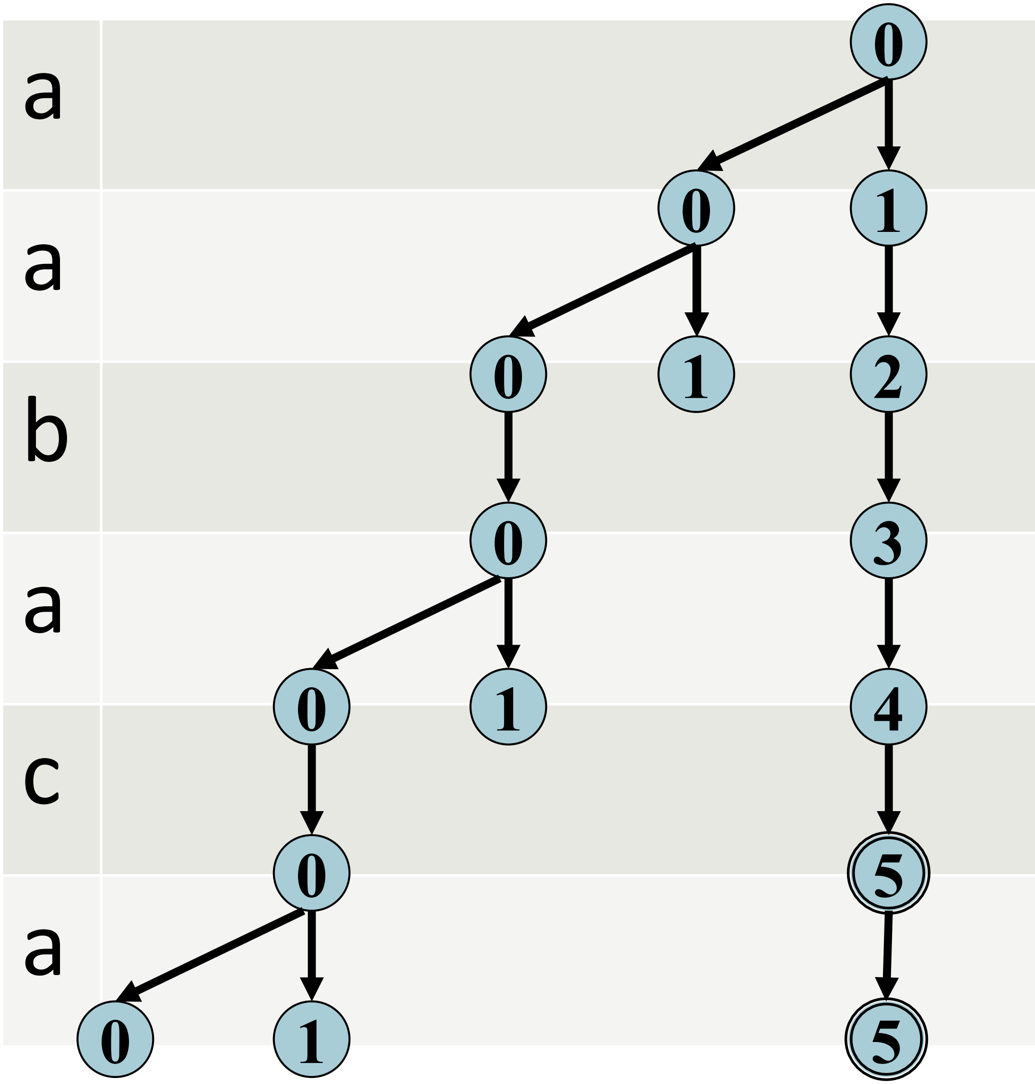
- 入力

  aabaca

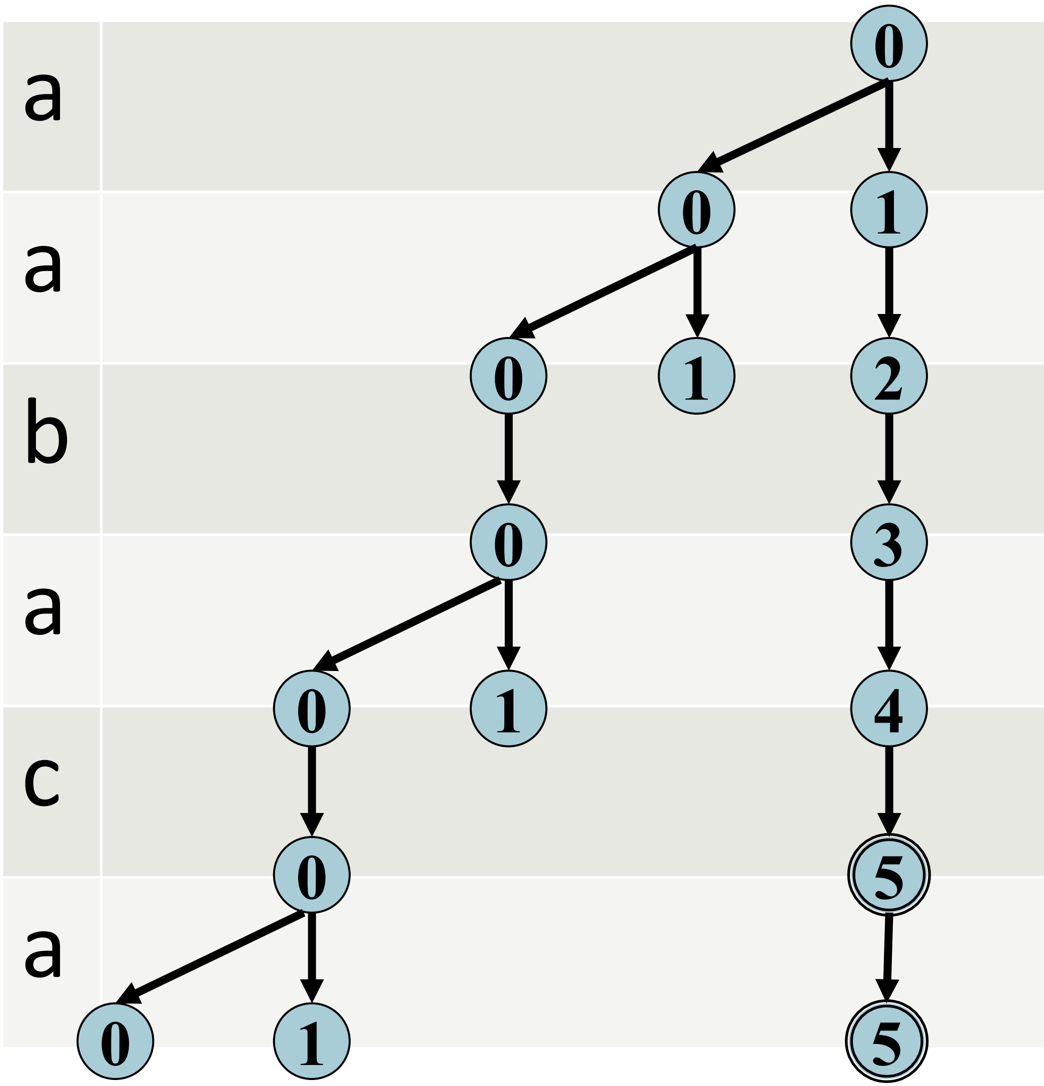
  に対する次の非決定性有限オートマトンの動作を考える.



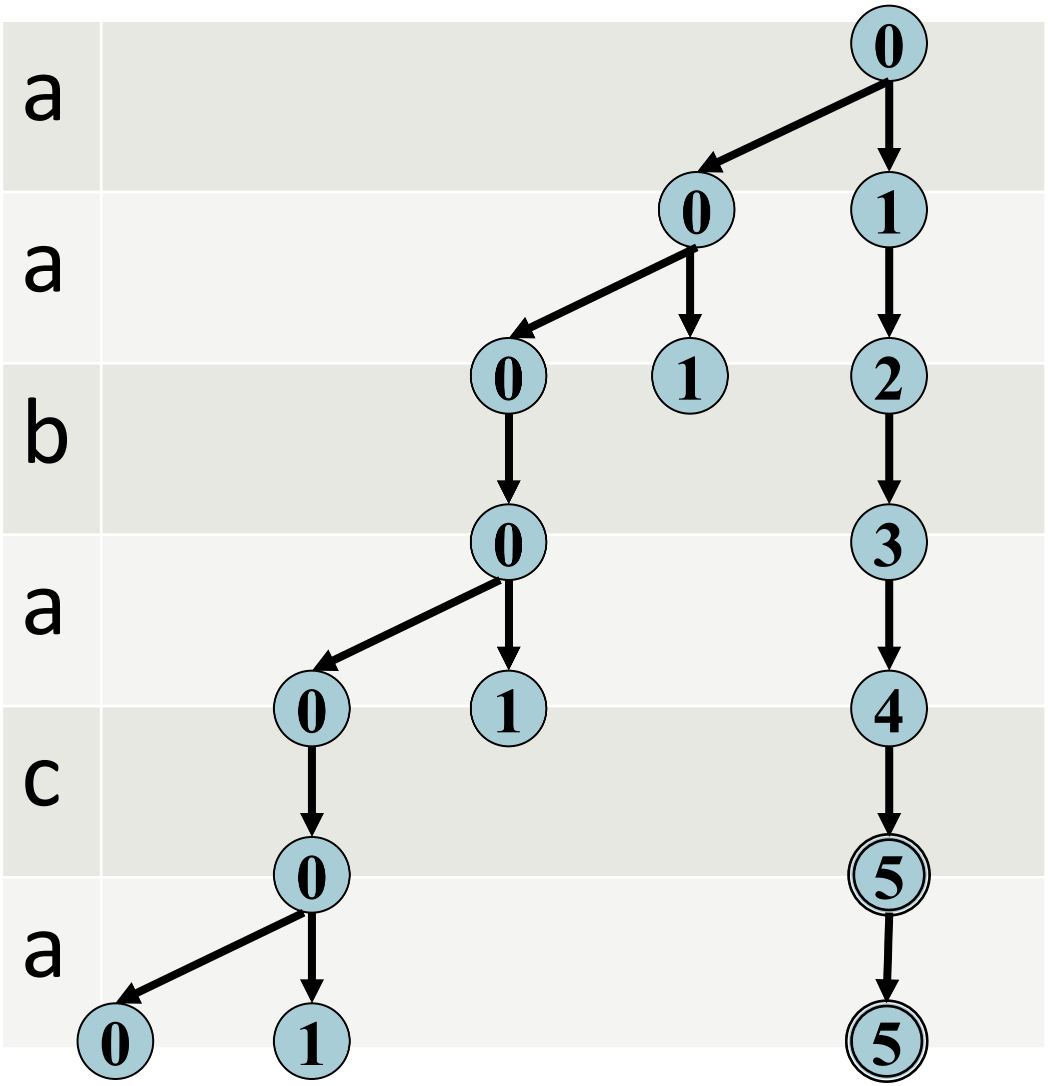
非決定性の計算



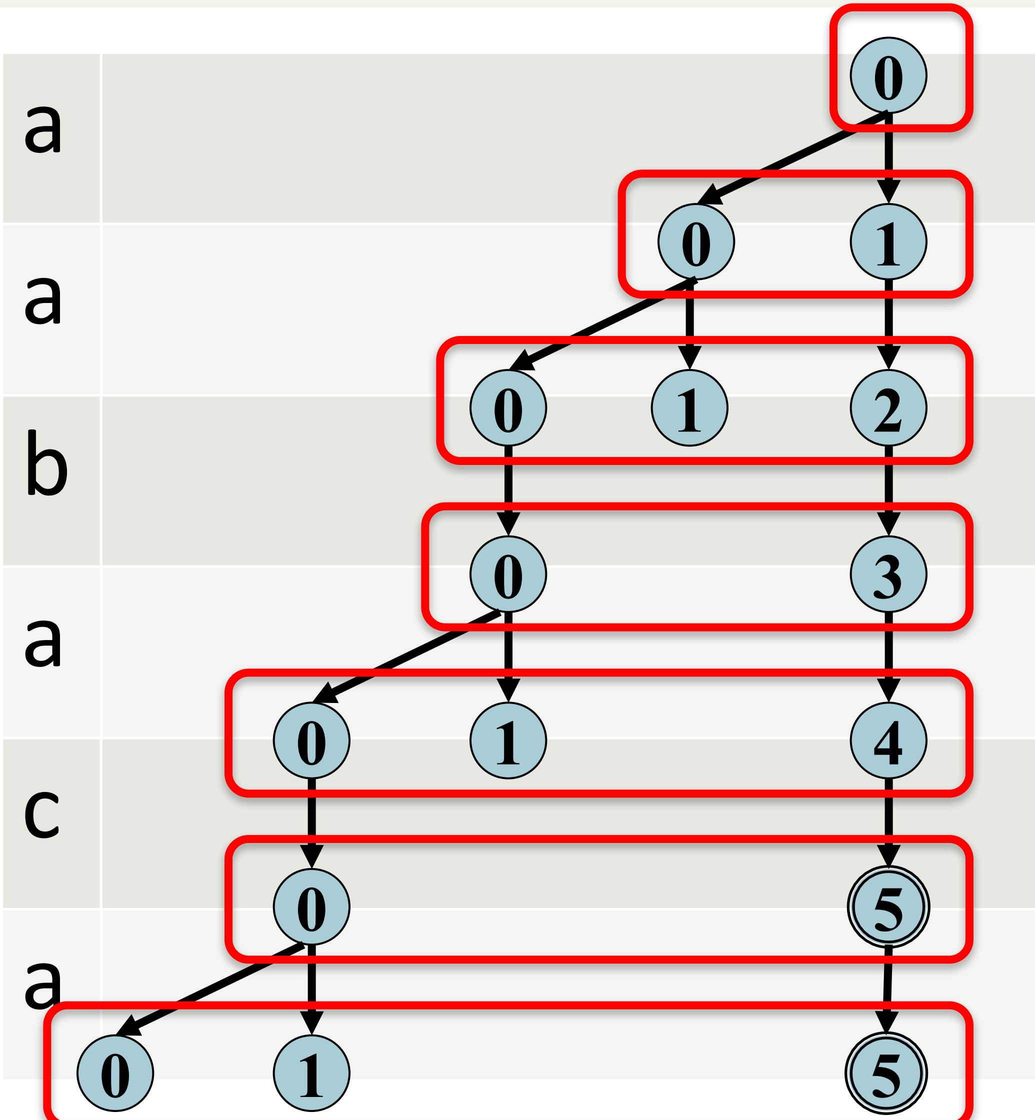
計算木の深さ優先探索（縦型探索）



計算木の幅優先探索（横型探索）

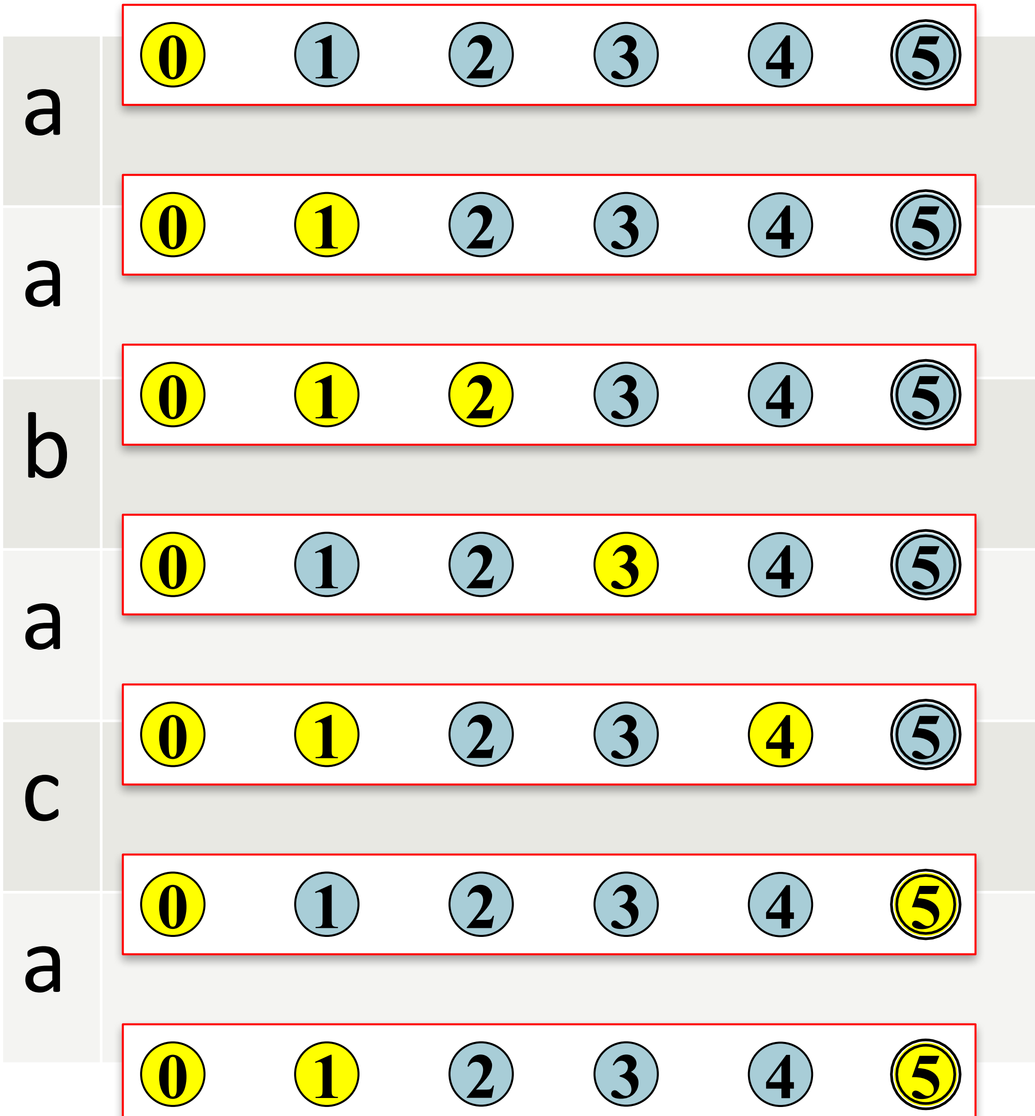


計算木の幅優先探索（横型探索）



文字を読むたびに
状態の集合を更新していく

計算木の幅優先探索(横型探索)



状態の集合を1つの状態とみなせば
これは決定性有限オートマトン!

計算木の幅優先探索(横型探索)

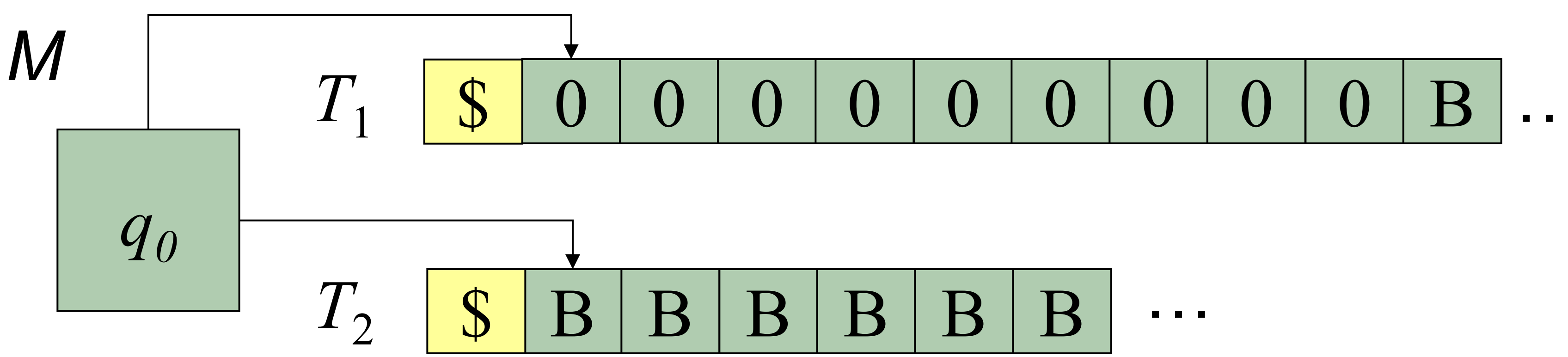
【定理】任意の非決定性有限オートマトンに対し，
それと等価な決定性有限オートマトンが存在する.

非決定性TURING機械

言語 $L=\{\ 0^n \mid n$は合成数 $\}$

2つ以上の素数の積で表わせる正整数

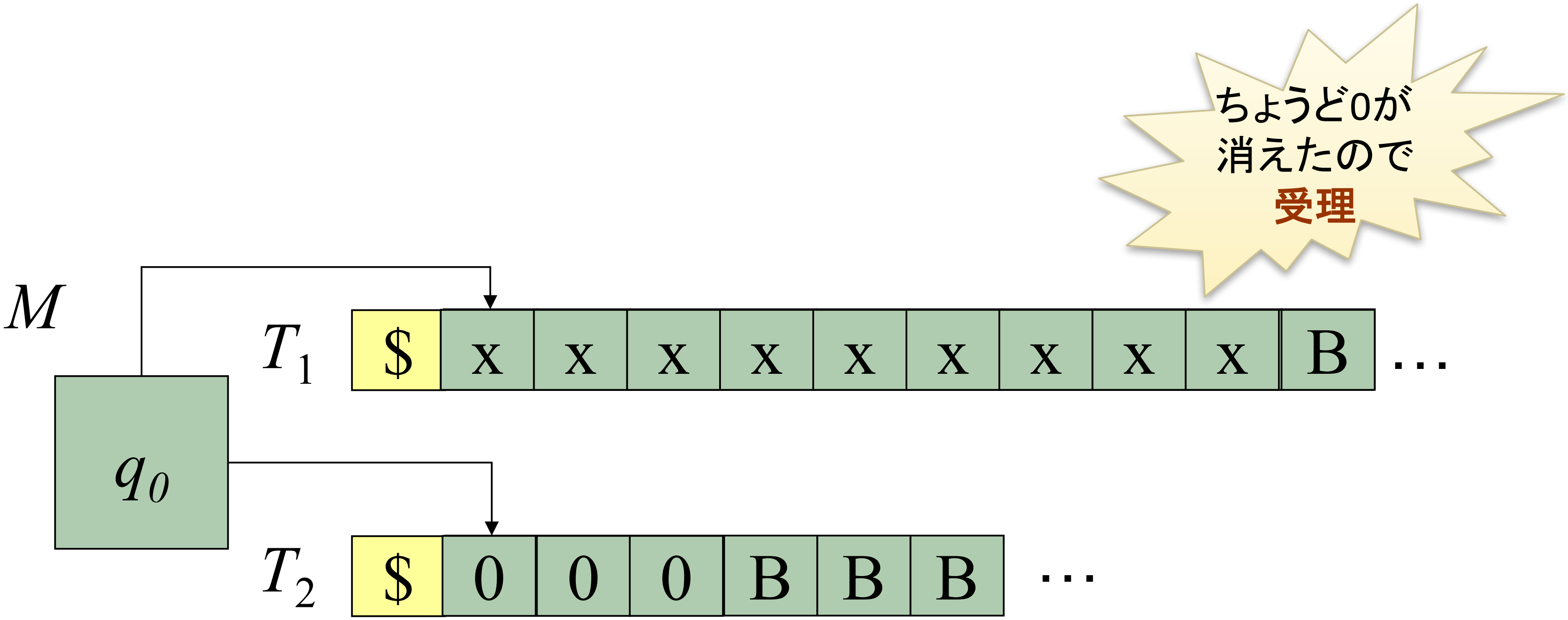
- 言語Lを**判定する**2テープTuring機械を考えよう.
  第1テープと第2テープを，それぞれ，T_1，T_2で表す.



L を判定するアルゴリズム

- $M=$ “T_1の入力文字列$w\in\{0\}^*$に対して:
  1. T_2に00と書く.
  2. T_1の0をT_2の0の数だけxで上書きする.
     T_1の0が全て上書きされたら受理する.
     T_1の0がT_2の0の数だけ余っていなければ,
     4に進む.
  3. T_1に0が残っていれば 2に戻る.
  4. T_2に0をひとつ追加する. T_1のxを全て0に戻す.
     T_1とT_2の0の数が同じになったら拒否する.
  5. 2に戻る. ”

入力0^9に対する動作



非決定性Turing機械

とっても重要

- 計算の任意の時点において，機械がとりうる動作が複数ある．そこで，遷移関数は，

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

の形式となる．

- $\delta(q_{\mathrm{accept}}, a) = \delta(q_{\mathrm{reject}}, a) = \varnothing$ とする．

$\mathcal{P}(X)$ は，集合 X の部分集合全体から成る集合を表す．
すなわち，$\mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$は，
$Q \times \Gamma \times \{L, R\}$の部分集合全体の集合．

非決定性Turing機械の遷移関数

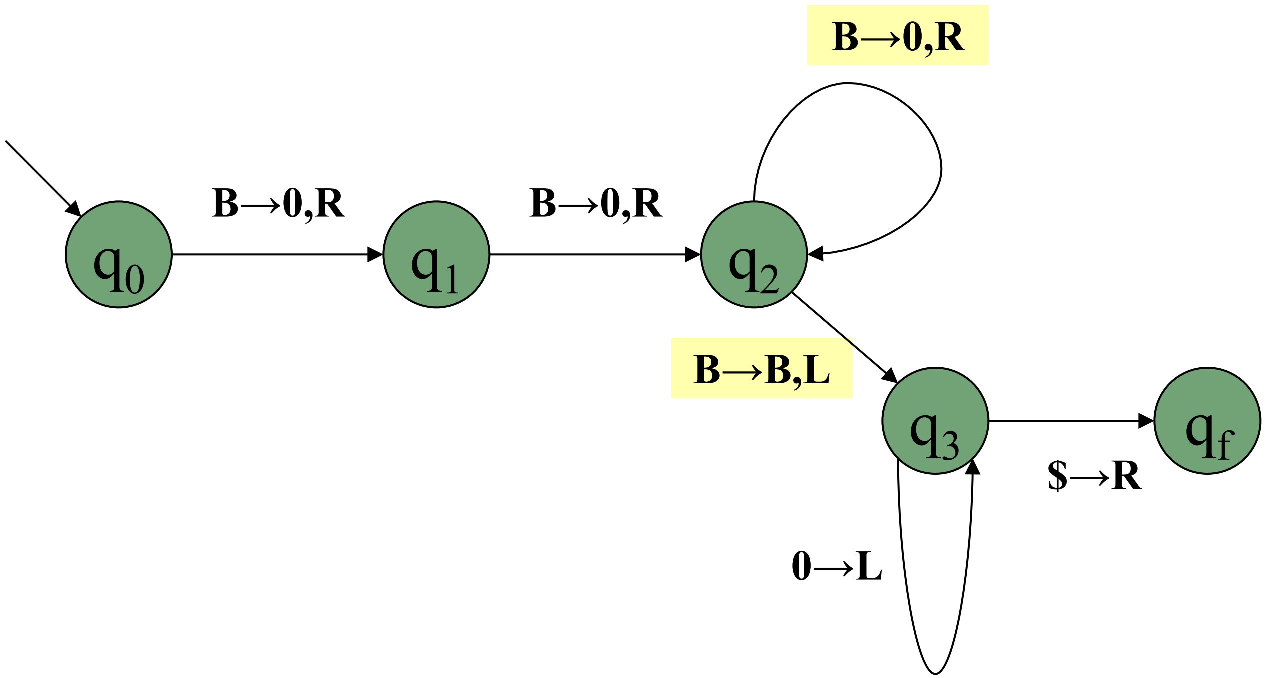
- 例:

  $\delta(q, a)=\{(q', b, R), (q'', c, L), (q, a, R)\}$,

  $\delta(q, a)=\{(q', b, R)\}$ などと書く.

  $\delta(q, a)=\phi$ でもよい.

テープに0を適当な数だけ2個以上書き出す遷移関数(遷移図)



$\delta(q_0, \mathrm{B})=\{(q_1, 0, R)\}$, $\delta(q_1, \mathrm{B})=\{(q_2, 0, R)\}$,

$\delta(q_2, \mathrm{B})=\{(q_2, 0, R), (q_3, \mathrm{B}, L)\}$,

$\delta(q_3, 0)=\{(q_3, 0, L)\}$, $\delta(q_3, \$)=\{(q_f, \$, R)\}$,

Lを判定する非決定性Turing機械

- $M =$ “T_1の入力文字列$w \in \{0\}^*$に対して:
  1. 非決定的な選択を行って，T_2に2個以上の0を適当な数だけ書く. T_2の0の個数がT_1の0の個数以上であれば拒否する.
  2. T_1の0をT_2の0の数だけxで上書きする.
     T_1の0が全て上書きされたら受理する.
     T_1の0がT_2の0の数だけ余ってなければ拒否する.
  3. T_1に0があれば，**2**に戻る. ”

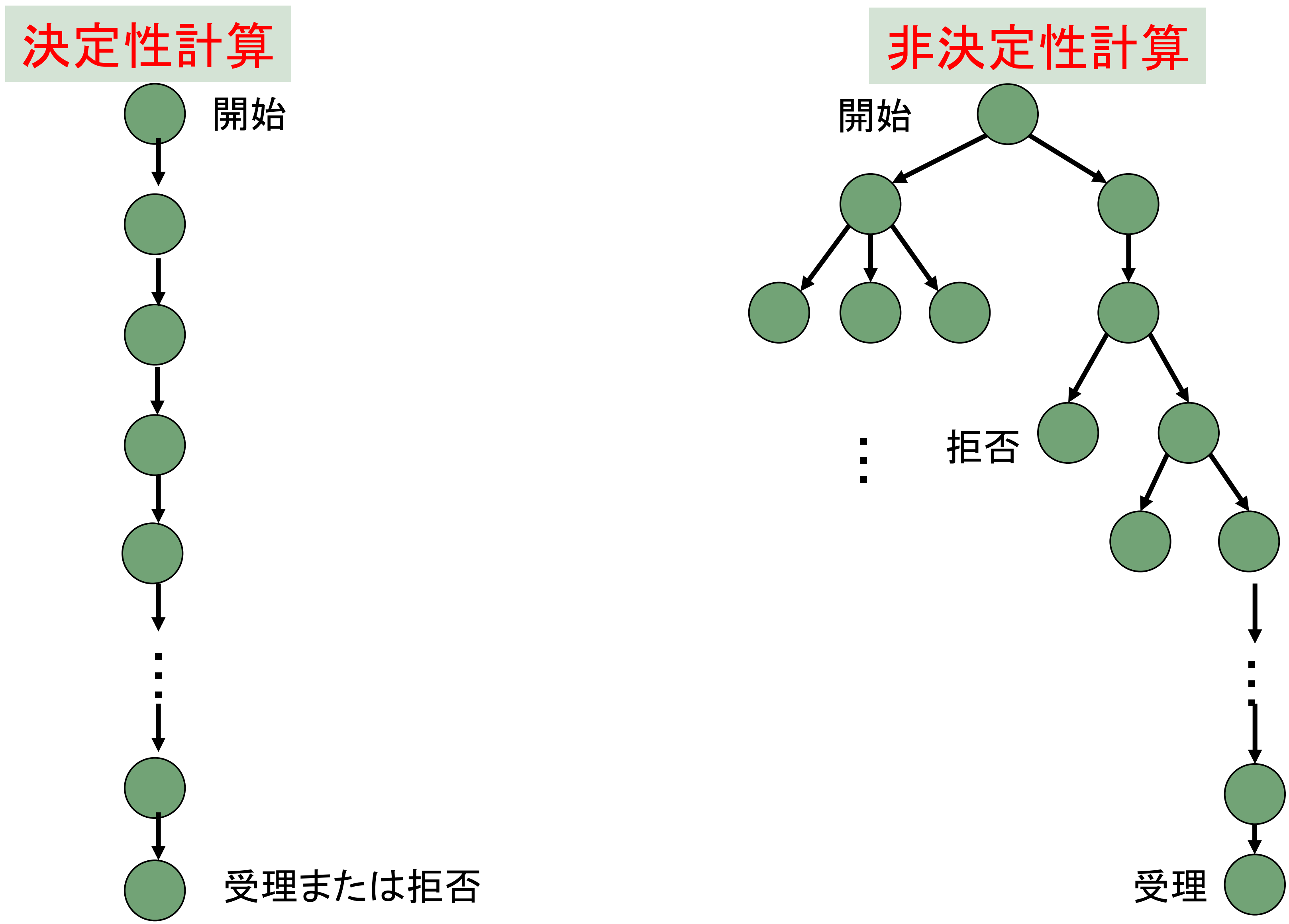
「適当な数だけ書く」とは？非決定的な選択

- もし入力文字列w=0^nがLに属すならば，うまく適当な数(nの約数)を書くことができれば，アルゴリズムはwを受理する．つまり，
  - $w \in L$ のとき:
    うまく非決定的な選択を行うことができれば，
    必ず w を受理する．
  - $w \notin L$ のとき:
    どんな非決定的な選択を行っても，
    決して w を受理しない．

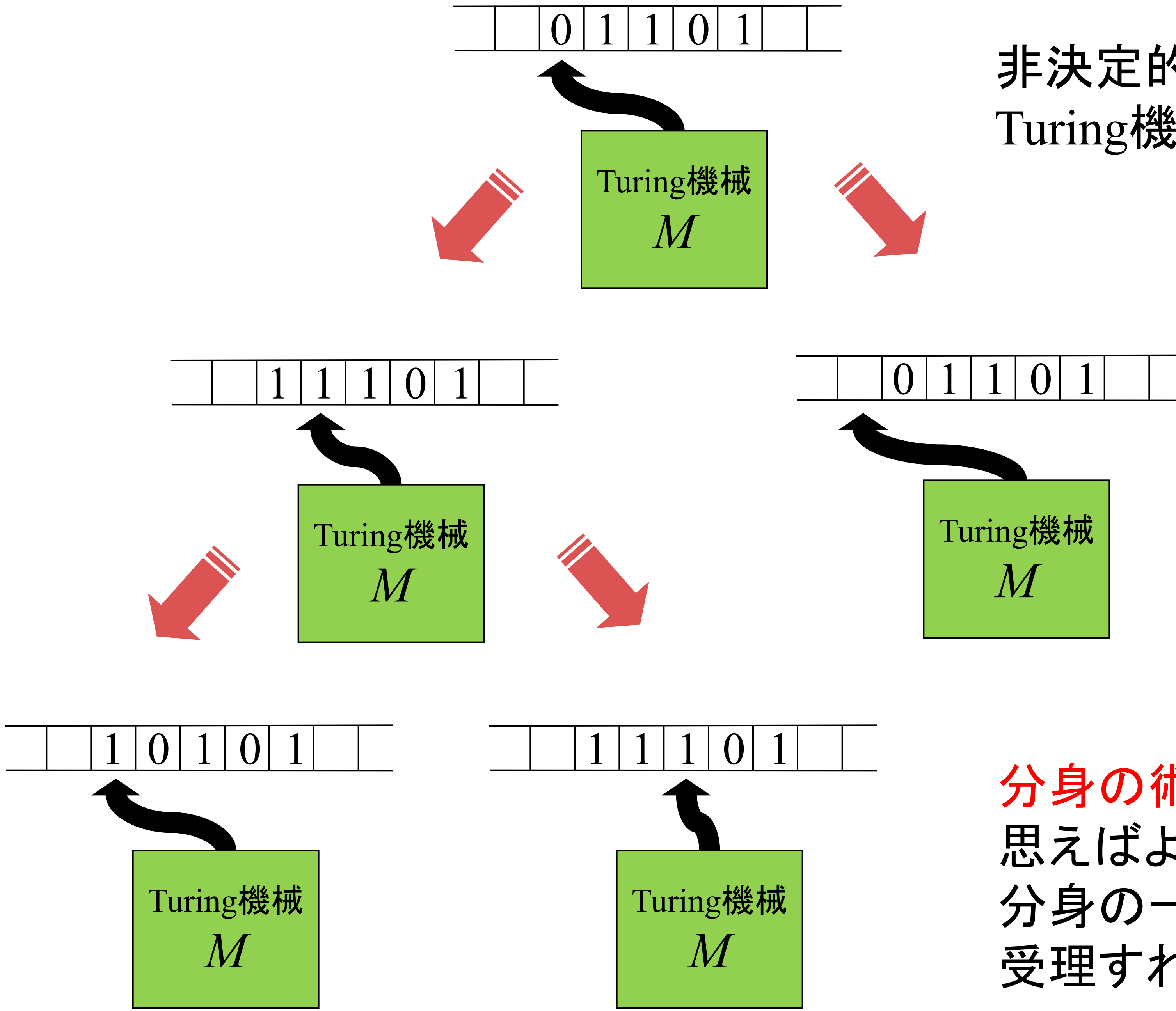
非決定性Turing機械による受理

- 入力 w に対する非決定性 Turing 機械 M の計算は,各々の枝が異なる選択に対応する木で表される.
- M の w に対する計算木において受理状況に到達する経路が少なくとも1つあるとき,
  M は w を受理するという.

決定性計算と非決定性計算



非決定的な
Turing機械



分身の術を使うと
思えばよい.
分身の一つが
受理すれば受理.

非決定性Turing機械の形式的定義

【定義】非決定性Turing 機械(NTM)は，以下を満たす7つ組 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ である.

- Q は状態の非空な有限集合.
- Σ は記号の非空な有限集合で，$\Sigma \cap \{B, \$\} = \varnothing$.
- Γ は記号の非空な有限集合で, $\Sigma \cup \{B, \$\} \subseteq \Gamma$.
- $\delta: Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$は状態遷移関数と呼ばれる関数で，$\delta(q_{accept}, a) = \delta(q_{reject}, a) = \varnothing$ である.
- $q_0 \in Q$ は開始状態.
- $q_{accept} \in Q$ は受理状態.
- $q_{reject} \in Q$ は拒否状態で $q_{reject} \neq q_{accept}$.

非決定性Turing機械の形式的定義(続き)

- 状態遷移関数 δ は以下を満たすものとする:
  任意の $p \in Q$ に対して,
  - $\delta(p, a) \subseteq Q \times (\Gamma - \{\$\}) \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ $(\forall a \in \Gamma - \{\$\})$
  - $\delta(p, \$) \subseteq Q \times \{\$\} \times \{\mathrm{R}\}$

上記は, ヘッドがテープをはみ出すことを防ぐための条件である.

非決定性TURING機械の動作を模倣する

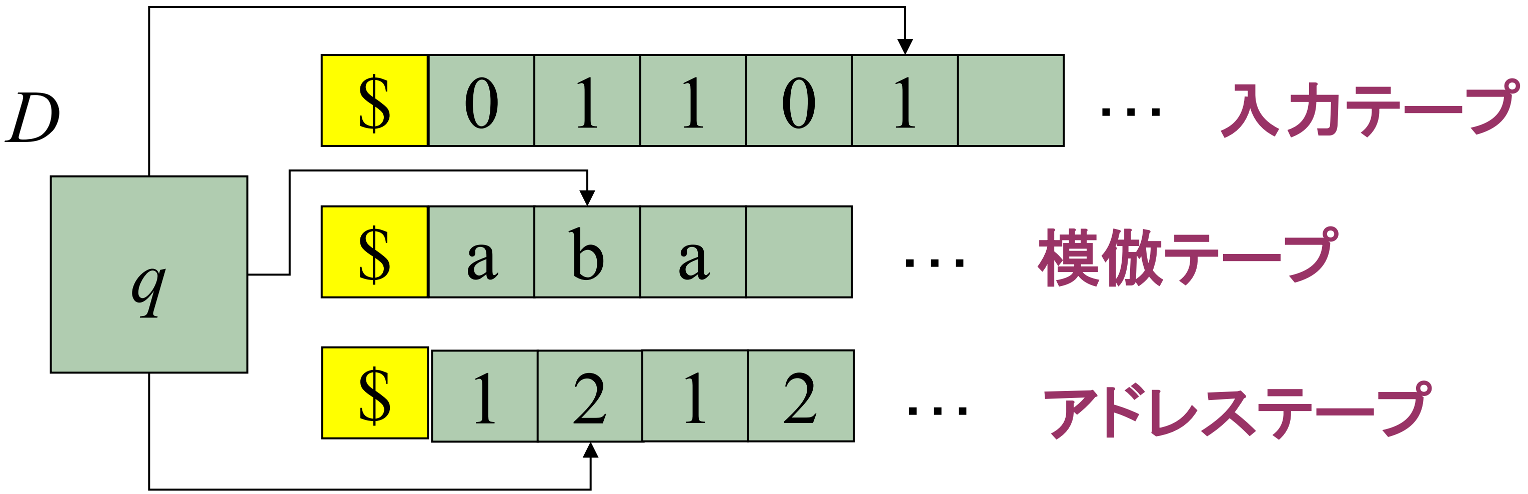
等価性

【定理5.1】 任意のNTMに対し，それと等価なDTMが存在する.

すなわち，
非決定性 Turing 機械の動作を
決定性 Turing 機械で模倣できる.

定理5.1の証明

- 任意の単一テープNTM N は
3テープDTM D で模倣できることを示す.



定理5.1の証明(続き)

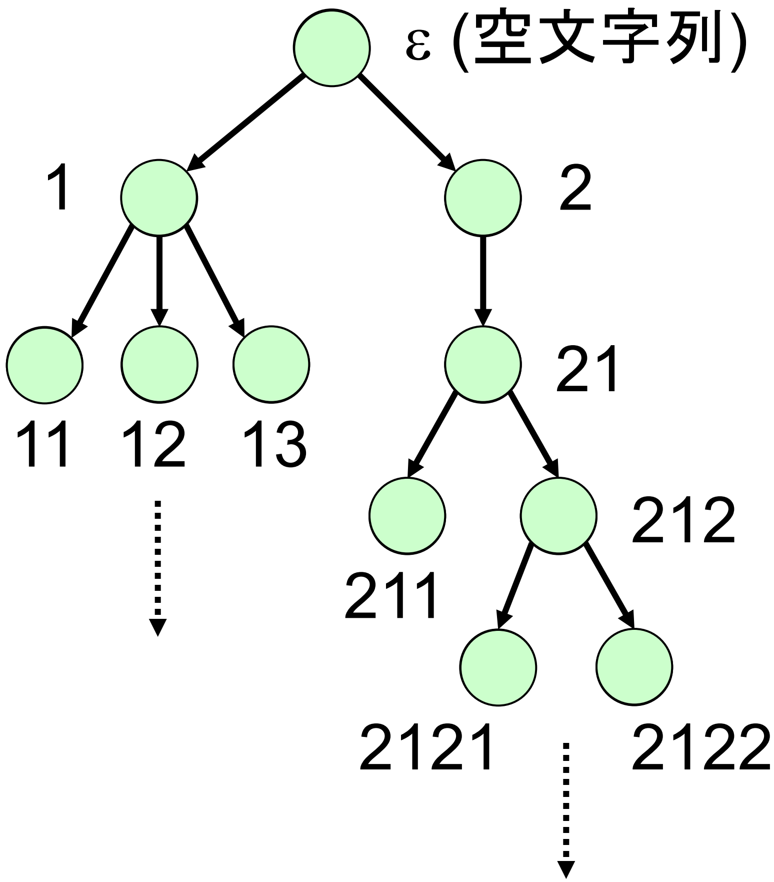
深さ優先探索だとどうなるだろう？

- Nの計算木を幅優先探索する.
- Nの計算木の枝分かれの最大数をbとし, $\Sigma_b=\{1,2,\ldots,b\}$上の文字列をアドレスとよぶ.
- 各頂点にアドレスを割り当てる. アドレスは, 計算木の根を出発して下へ向かう際に, 左から何番目の枝を下るかを表す.
- 枝分かれが少なくて進めないときは, そのアドレスを無効とする.

定理5.1の証明(続き)

アドレステープに次の順番で
アドレスを書いていく.

頂点のアドレス



B	B	B	B	B
1	B	B	B	B
2	B	B	B	B
3	B	B	B	B
1	1	B	B	B
1	2	B	B	B
1	3	B	B	B
2	1	B	B	B

$は省いている

定理5.1の証明(続き): Nの模倣アルゴリズム

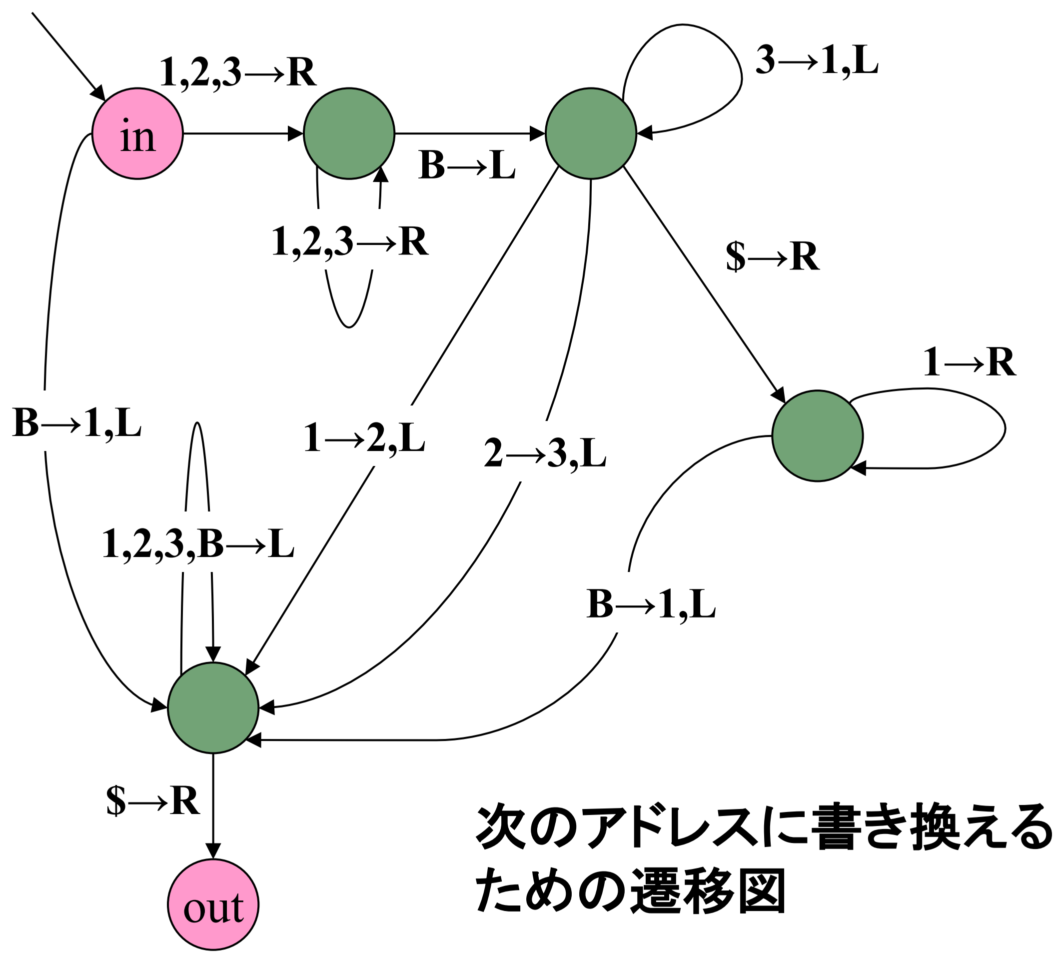
1. 入力テープは入力wを含み，模倣テープ，アドレステープは空である.
2. 模倣テープに入力wをコピーする.
3. アドレステープにしたがって，Nの非決定的な選択を模倣する. アドレステープの文字列を使い切ったり，対応する非決定的な選択がない場合には，4に行く. 拒否状況に達したときも4に行く. 受理状況に到達したら，wを受理する.
4. アドレステープの文字列を次の文字列に置き換え，2に戻る.

(証明終)

補足：アドレステープの内容更新

b=3，すなわち$\Sigma_b=\{1,2,3\}$のとき

$	B	B	B	B	B
$	1	B	B	B	B
$	2	B	B	B	B
$	3	B	B	B	B
$	1	1	B	B	B
$	1	2	B	B	B
$	1	3	B	B	B
$	2	1	B	B	B



次のアドレスに書き換えるための遷移図

非決定性TURING機械による言語の「認識」「判定」

復習：決定性Turing機械による「認識」「判定」

【定義】 DTM M が言語 L を認識するとは，すべての $w \in \Sigma^*$ に対して M が以下を満たすときをいう.

- $w \in L$ ならば，M は w を受理する.
- $w \notin L$ ならば，M は w を拒否するか，または，ループする.

【定義】 DTM M が言語 L を判定するとは，すべての $w \in \Sigma^*$ に対して M が以下を満たすときをいう.

- $w \in L$ ならば，M は w を受理する.
- $w \notin L$ ならば，M は w を拒否する.

非決定性Turing機械による「認識」「判定」

【定義】 NTM M が言語 L を認識するとは,
すべての $w\in\Sigma^*$ に対して M が以下を満たすときをいう.

- $w\in L$ ならば，受理計算状況へ至る経路が存在する.
- $w\notin L$ ならば，受理計算状況へ至る経路が存在しない.

【定義】 NTM M が判定装置であるとは,
すべての $w\in\Sigma^*$ に対して，M の w に対する計算木が
無限長の経路を含まないときをいう.

【定義】 NTM M が言語 L を判定するとは,
M が判定装置であり，かつ，言語 L を認識するときをいう.

言語の認識・判定能力の等価性

【命題5.1】 任意の言語Lに対し，Lを認識するNTMが存在するとき，かつ，そのときに限り，LはTuring認識可能である．

【命題5.2】 任意の言語Lに対し，Lを判定するNTMが存在するとき，かつ，そのときに限り，LはTuring判定可能である．