

計算可能性理論

Computability Theory

4. Turing機械の変種(2)

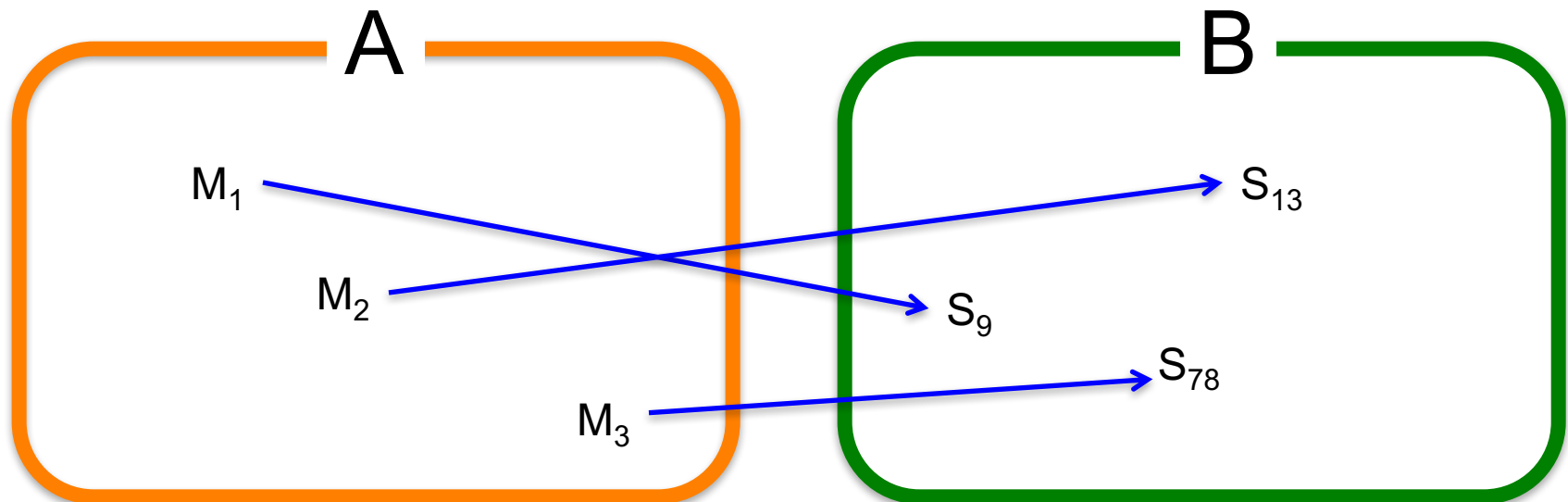
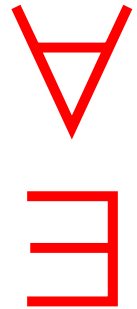
本日の内容

- 計算モデルの等価性を示すには
- 決定性Turing機械のその他の変種
 - 両側無限テープ決定性Turing機械
 - 左リセット決定性Turing機械
 - 一度書込可決定性Turing機械
 - LNR-決定性Turing機械
 - R-決定性Turing機械
 - NR-決定性Turing機械
 - まとめ

計算モデルの等価性を示すには

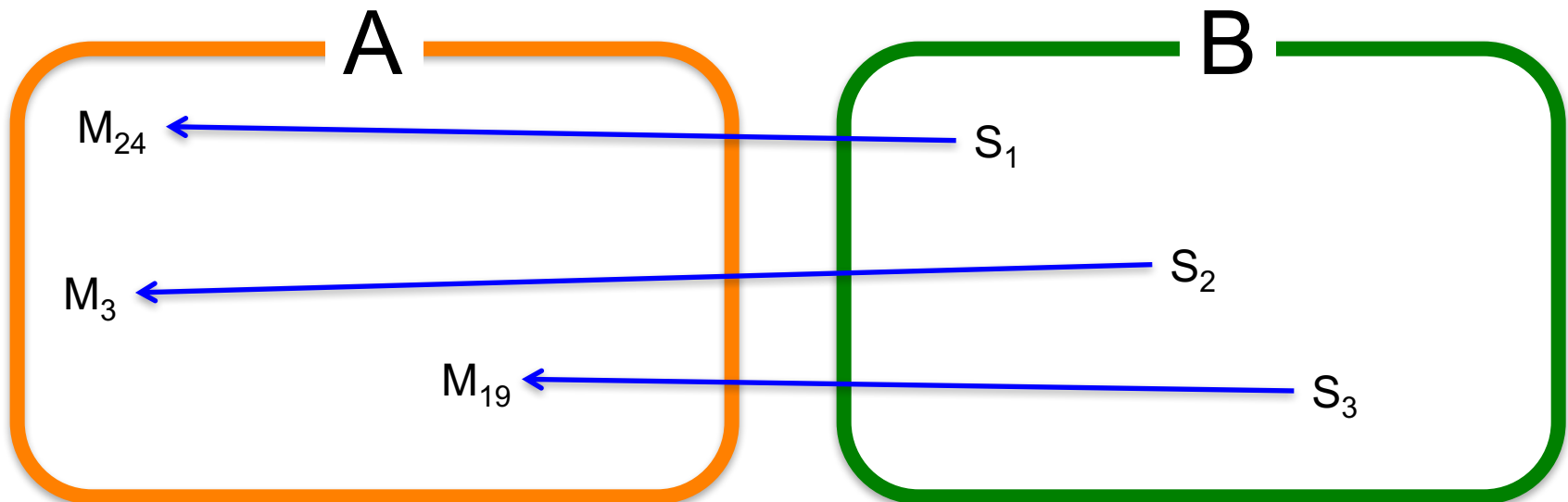
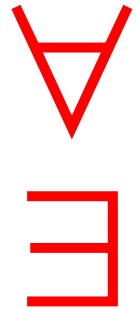
計算モデルA, Bの等価性を示すには

- 計算モデルAの**すべての**機械Mが
計算モデルBの**ある**機械Sによって
模倣できることを示す.

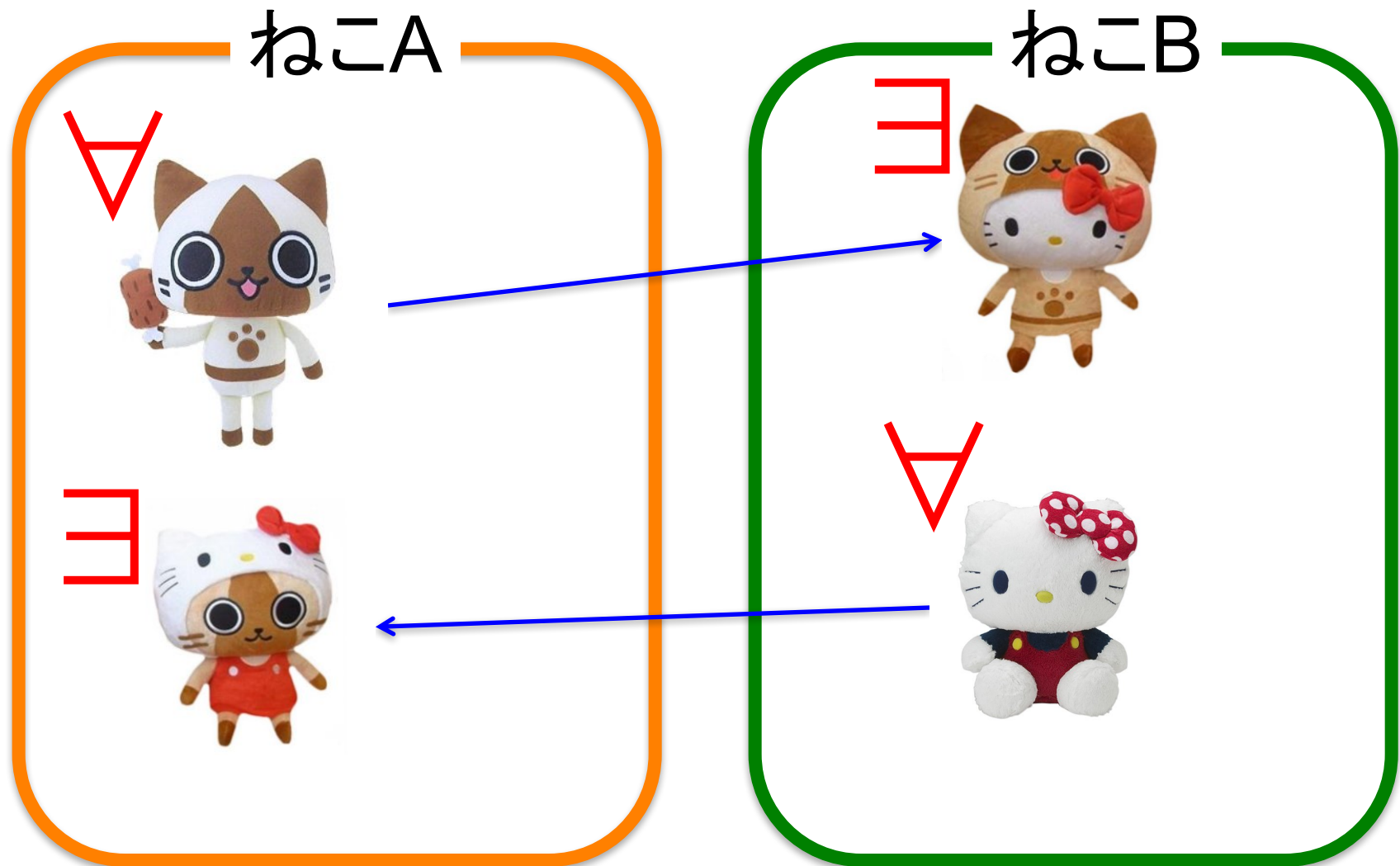


計算モデルA, Bの等価性を示すには

- 計算モデルAの**すべての**機械Mが
計算モデルBの**ある**機械Sによって
模倣できることを示す.
- その逆も成り立つことを示す.



例えて言うと...

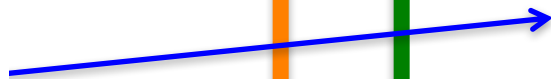


種類の異なる計算モデルでも...

いぬ



ねこ



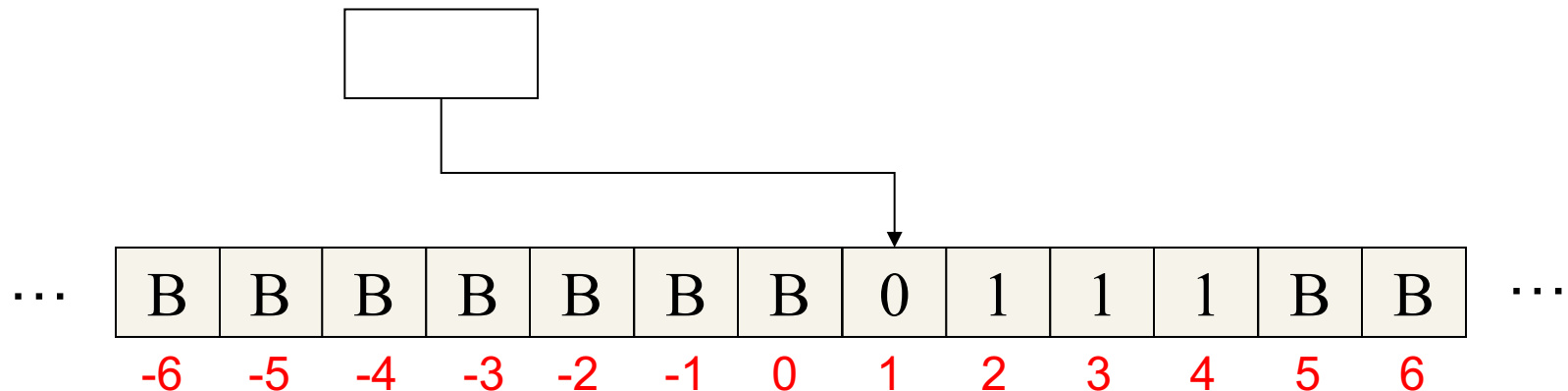
本日の内容

- 計算モデルの等価性を示すには
- 決定性Turing機械のその他の変種
 - 両側無限テープ決定性Turing機械
 - 左リセット決定性Turing機械
 - 一度書込可決定性Turing機械
 - LNR-決定性Turing機械
 - R-決定性Turing機械
 - NR-決定性Turing機械

両側無限テープ
決定性TURING機械

両側無限テープ決定性Turing機械

- テープが左右に無限.
- 初期計算状況では:
 - 1コマ目から入力文字列が書かれ, それ以外のコマはB.
 - テープヘッドは1コマ目にある.



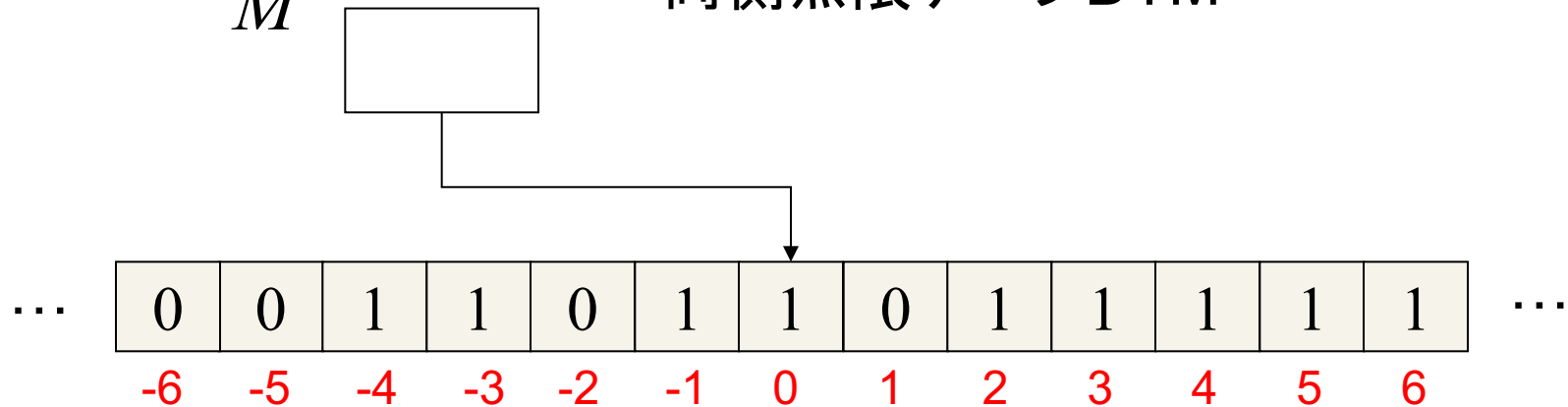
【定理4.1】 両側無限テープDTMの認識する言語のクラスはTuring認識可能な言語のクラスに一致する.

定理4.1の証明: 方針

- 次の2つを示せばよい.
 1. すべての両側無限テープDTMに対し, その動作を模倣するDTMが存在する.
 2. すべてのDTMに対して, その動作を模倣する両側無限テープDTMが存在する.
- 2は明らかである.
 - 最初に左に動いて位置 0 に \$ を書き込んでから右へ戻り, その後に模倣を行えばよい.
- 1を示す.

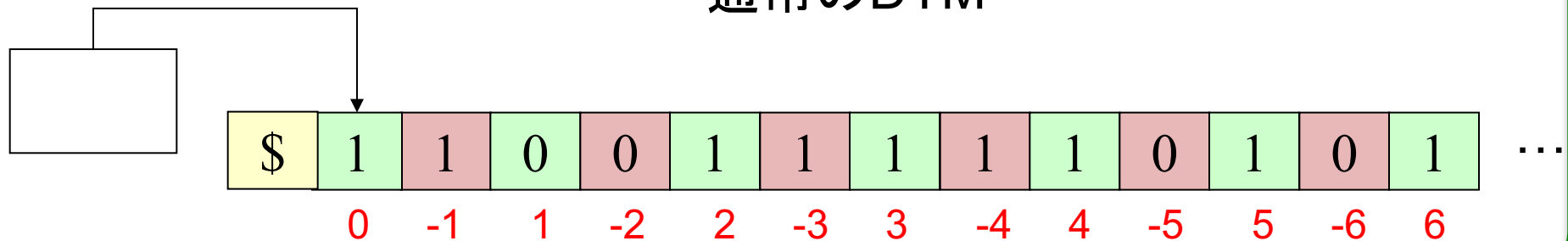
両側無限テープDTM M の動作を模倣

M 両側無限テープDTM

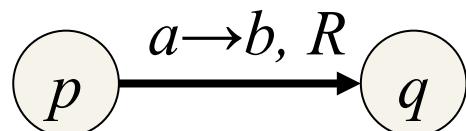


S

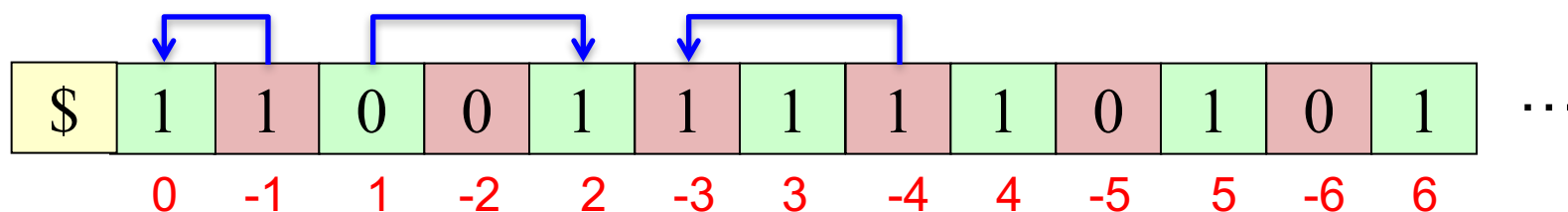
通常のDTM



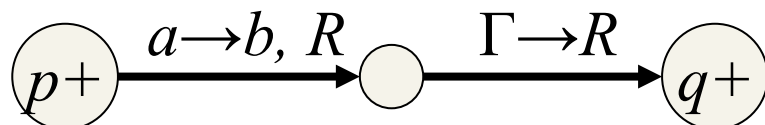
両側無限テープDTM M の動作を模倣(つづき)



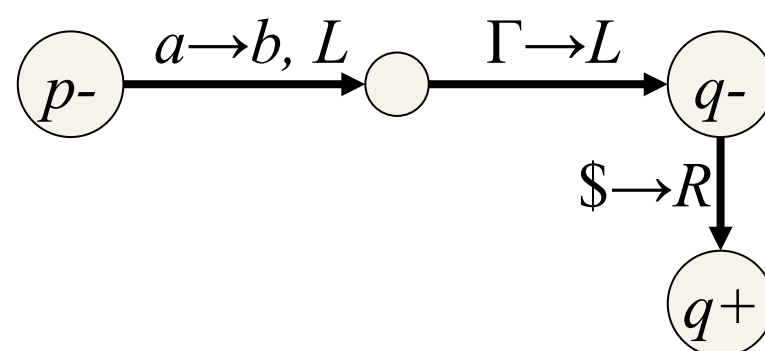
M がヘッドを右に動かすとき...

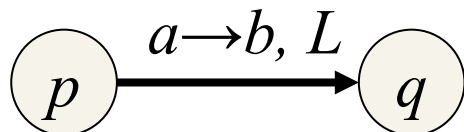


M のヘッドが0,1,2,...コマ目にあるとき

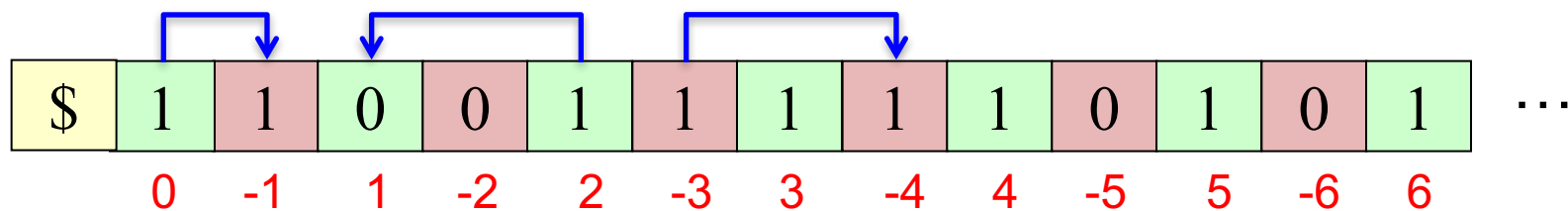


M のヘッドが-1,-2,...コマ目にあるとき

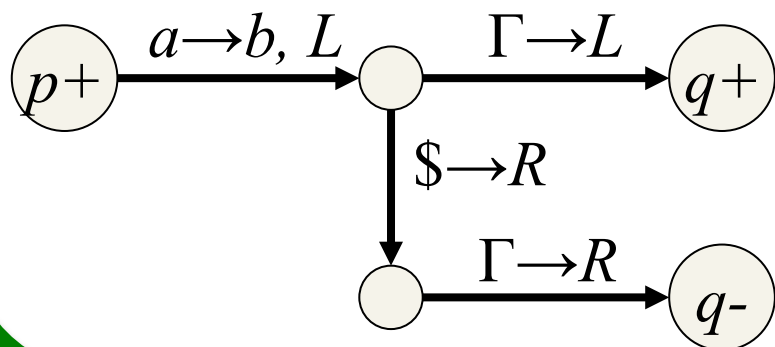


両側無限テープDTM M の動作を模倣(つづき)

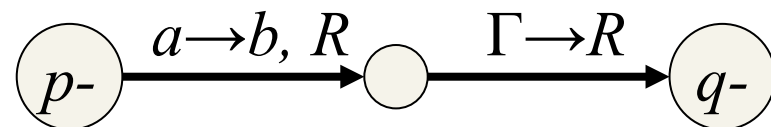
M がヘッドを左に動かすとき...



M のヘッドが0,1,2,...コマ目にあるとき



M のヘッドが-1,-2,...コマ目にあるとき



左リセット決定性TURING機械

左リセット決定性Turing機械

■ 状態遷移関数が

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ R, \text{RESET} \}$$

の形式をとることを除いて, 通常のDTMと同じ.

- $\delta(q, a) = (r, b, \text{RESET})$ ならば, 状態 q で a を読んだら, b に書き換え状態 r に入った後に, ヘッドを左端の\$の位置に移す.

- 左に1コマだけ動かすことができない.

【定理4.2】 左リセットDTMの認識する言語のクラスは, Turing 認識可能な言語のクラスに一致する.

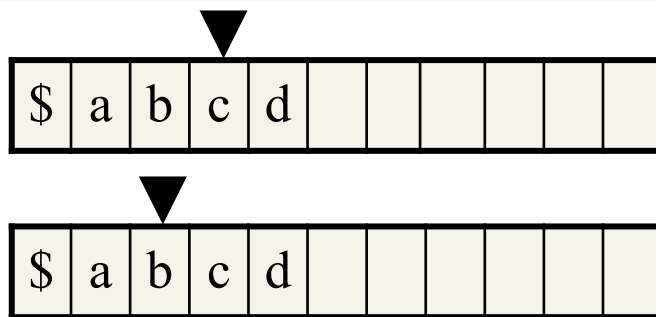
定理4.2の証明: 方針

- 次の2つを示せばよい.
 1. すべての左リセットDTMに対し,
その動作を模倣するDTMが存在する.
 2. すべてのDTMに対して, その動作を模倣する
左リセットTMが存在する.
- 1は明らか.
 - リセット動作は, DTMでエンドマーカ \$ に達するまでヘッドを左へ動かし続けることにより模倣できる.
- 2を示す.
 - アイデア: DTMのヘッド位置を下線付き文字で表す.

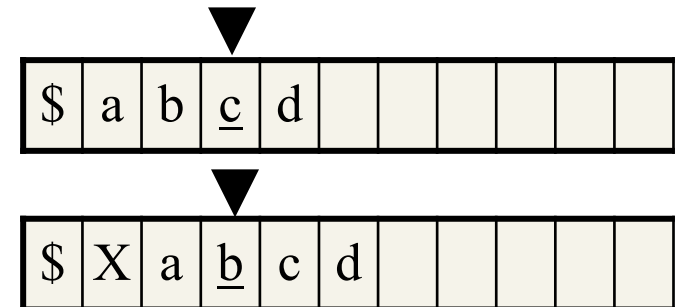
「左へ1コマ動かす動作」の模倣(1／2)

■ 以下の手順で模倣する.

- ① 左リセット.
- ② テープ全体を右へ1コマ分シフトする.
その際下線付き文字の位置を変えない.
- ③ 左リセット.
- ④ 下線付き文字を見つけるまで右へ動き,
見つかったら次の動作の模倣へ.

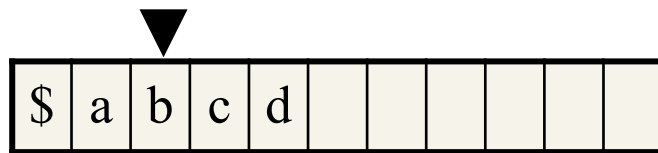
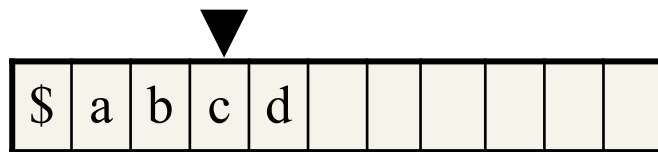


通常のTM

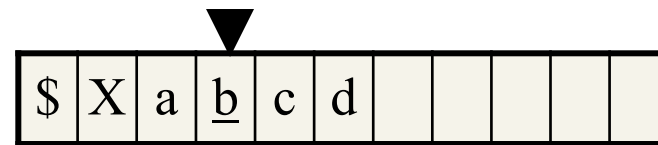
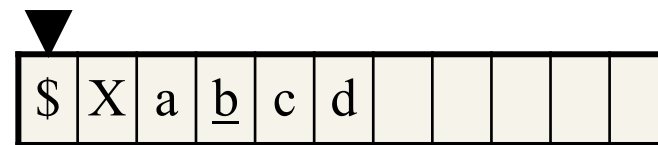
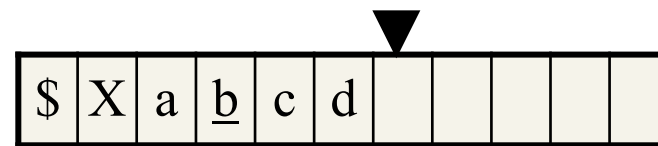
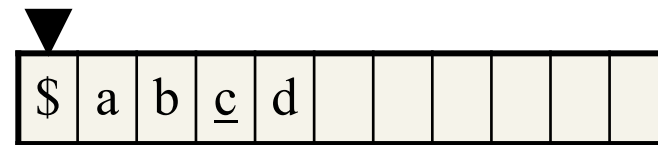
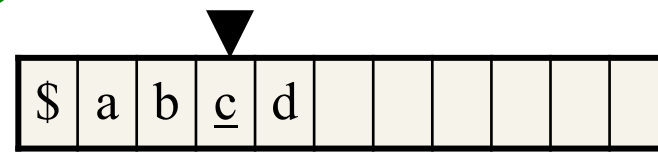


左リセットTM

「左へ1コマ動かす動作」の模倣(2/2)



通常のDTM

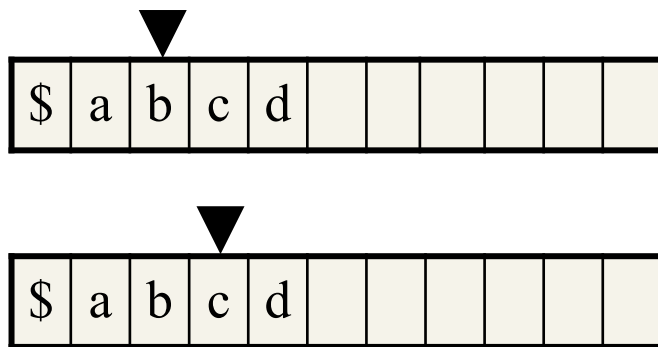


左リセットDTM

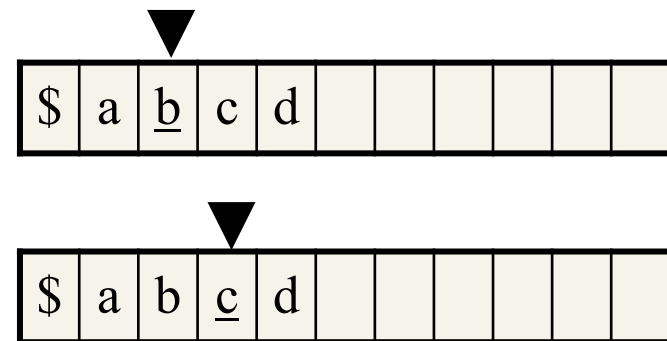
「右へ1コマ動かす動作」の模倣(1／2)

■ 以下の手順で模倣する.

- ① 下線付き文字を下線なしに書き換えて右へ1コマ動く.
- ② ヘッド位置の文字を下線付きに書き換え, 右へ1コマ動く.
- ③ 左リセット.
- ④ 下線付き文字を見つけるまで右へ動く. 見つかったら次の動作の模倣へ.

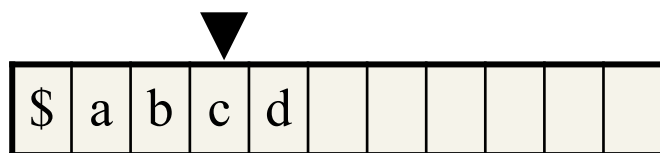
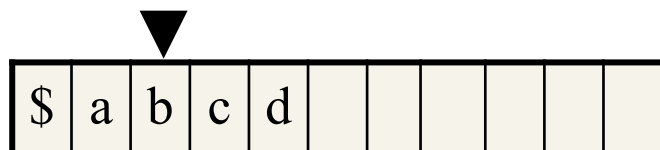


通常のDTM

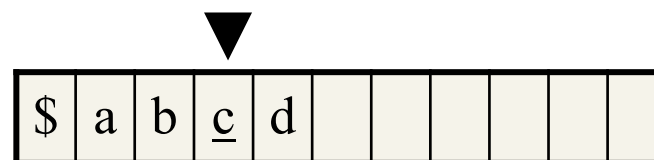
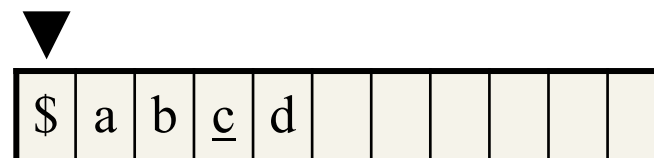
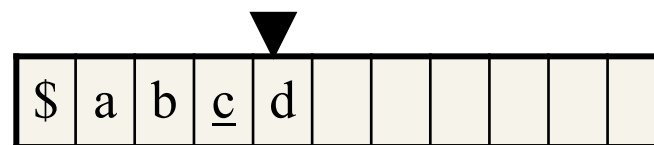
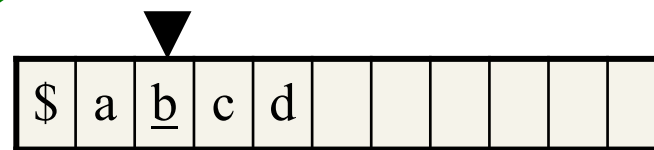


左リセットDTM

「右へ1コマ動かす動作」の模倣(2/2)



通常のDTM



左リセットDTM

一度書込可決定性TURING機械

一度書込可決定性Turing機械

- 各テープのます目(入力部分を含む)を高々一度異なる文字に変更できる単一テープDTM.

【定理4.3】 一度書込可DTMの認識する言語のクラスは Turing 認識可能な言語のクラスに一致する.

定理4.3の証明: 方針

- 次の2つを示せばよい.
 1. すべての一度書込可DTMに対し,
その動作を模倣するDTMが存在する.
 2. すべてのDTMに対して, その動作を模倣する
一度書込可DTMが存在する.
- 1は自明なので2を示す.

DTMの動作を模倣する二度書込可DTM

▼
\$ a b c

▼
\$ d b c

▼
\$ d e c

通常のDTM

▼
\$ a b c

▼
\$ X X X # d b c

▼
\$ X X X # X X X # d e c

二度書込可DTM

コピー時と消去時の2回,
異なる文字に書き換える

DTMの動作を模倣する一度書込可DTM

\$ a b c

\$ d b c

\$ d e c

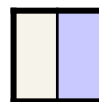
通常のDTM

\$ a b c

\$ a X b X c X # d b c

\$ a X b X c X # d X b X c X # d e c

一度書込可DTM



左に文字, 右に削除マークを格納

LNR-決定性TURING機械

LNR-決定性Turing機械

- 状態遷移関数が,

静止

$$\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$$

の形式をとることを除き, 通常のDTMと同じ.

- 各時点でヘッドを左右に動かすか,
同じ場所に静止させることができる.

【定理4.4】 LNR-DTMの認識する言語のクラスは,
Turing 認識可能な言語のクラスに一致する.

定理4.4の証明: 方針

- 次の2つを示せばよい.
 1. すべてのLNR-DTMに対し, その動作を模倣するDTMが存在する.
 2. すべてのDTMに対して, その動作を模倣するLNR-DTMが存在する.
- 2は自明なので1を示す.
- LNR-DTMによるヘッドを動かさない動作を2ステップで模倣.
 - ステップ1: 文字を書き換えながらヘッドを右へ動かす.
 - ステップ2: 文字は書き換えずヘッドのみ左に動かす.

R-決定性TURING機械

R-決定性Turing機械

- 状態遷移関数が,

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ R \}$$

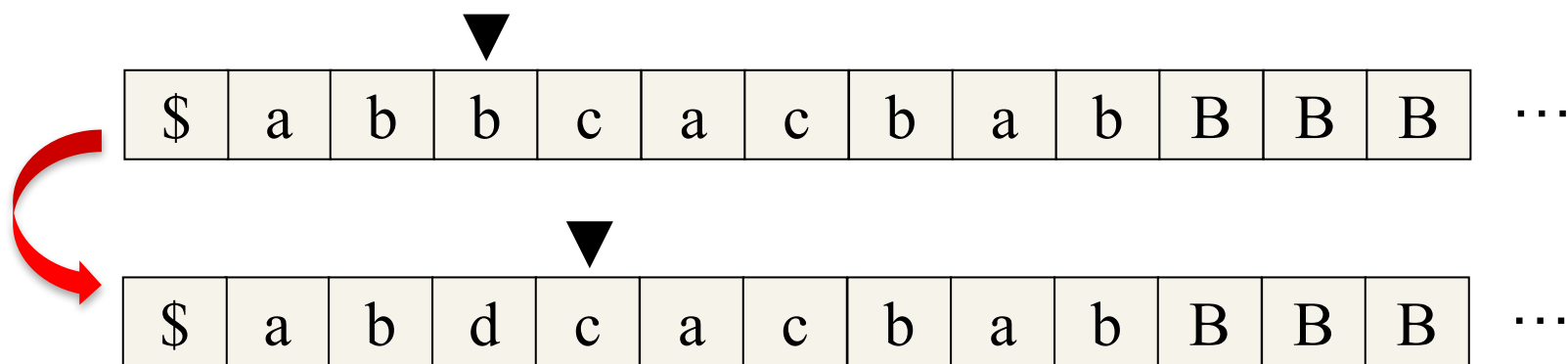
の形式をとることを除き, 通常のDTMと同じ.

- ヘッドは右にのみ動かすことができる.
 - 左に動かすことや静止させることはできない.

【定理4.5】 **R-TM**の認識する言語のクラスは
正規言語のクラスに一致する.

定理4.5の証明の前に...

- R-DTM では、ヘッド位置の文字を書き換えた後、ヘッドは右へ動き、同じ位置に戻ることはなく、文字の書き換えはその後の動作に影響しない。
- R-DTMは文字を書き換えないものとしてよく、状態遷移図の辺のラベルは $a \rightarrow R$ ($a \in \Gamma$)と仮定できる。



せっかく書き換えても
ここに戻ってくることはない！

定理4.5の証明

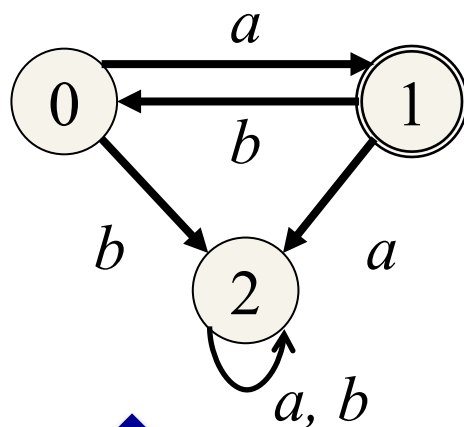
【補題4.1】 すべての R-DTM M に対して, それと等価で以下を満たす R-DTM M' が存在する:

任意の辺 $e=(p,q)$ に対して,

$$e \text{ のラベルが } B \rightarrow R \iff q \in \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$$

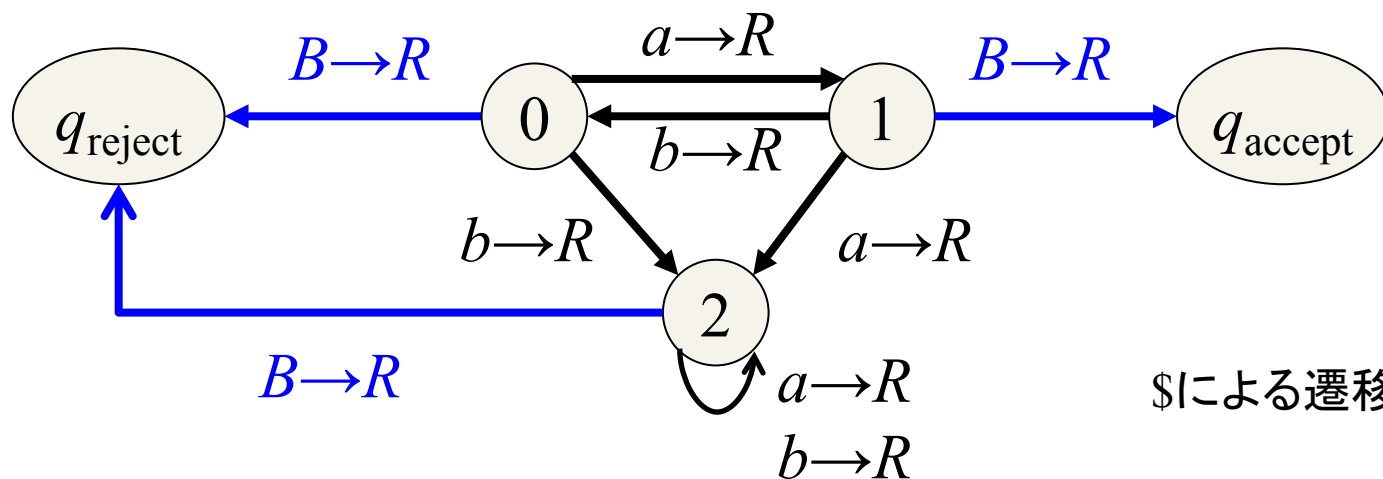
定理4.5の証明

DFA



DFAと
命題4.1の条件を満たすR-DTMは
このように対応させることができる.

R-DTM



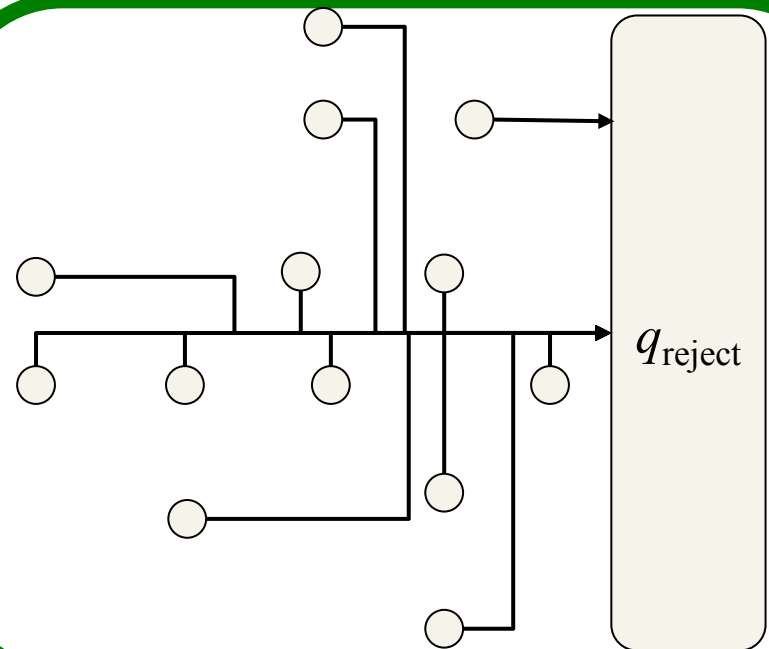
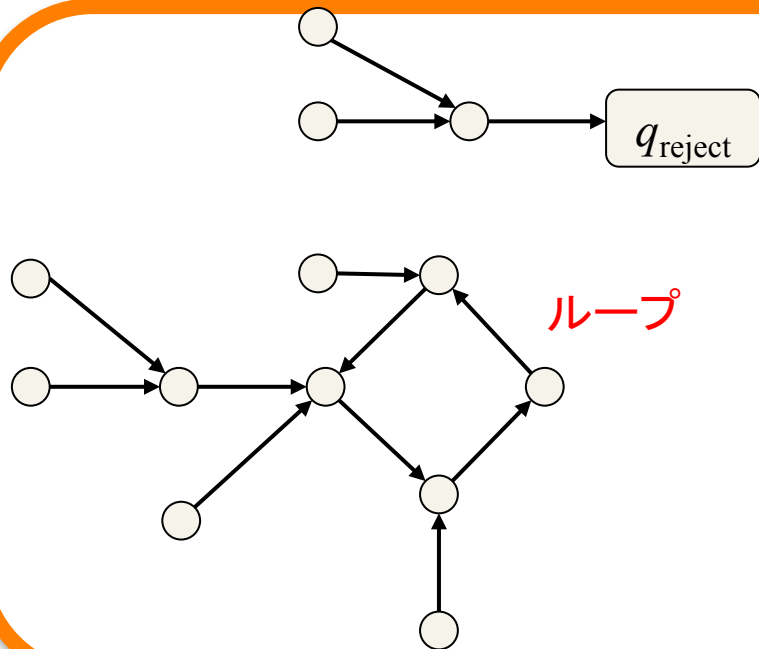
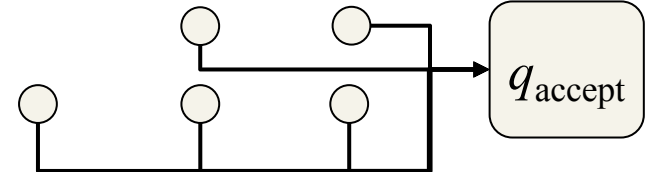
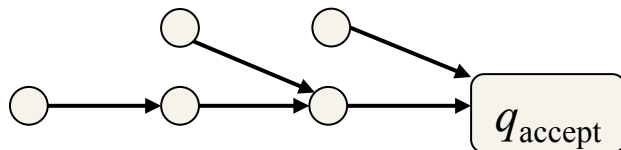
\$による遷移は省いた

補題4.1の証明

- 以下の手順で M' を構築できる.
- ① ラベルが $B \rightarrow R$ である各辺について, 行き先が受理状態と拒否状態のいずれでもなければ行き先を変更する.
- ② 受理状態か拒否状態へ向かう各辺について, ラベルが $B \rightarrow R$ でないものの行き先を変更する.

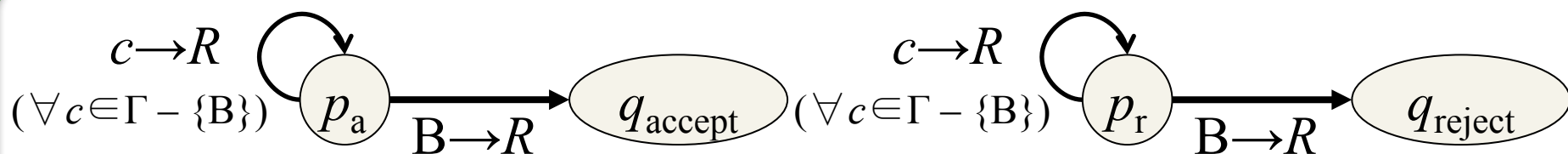
ステップ①

- ラベルが $B \rightarrow R$ である辺の行き先を次のように変更.

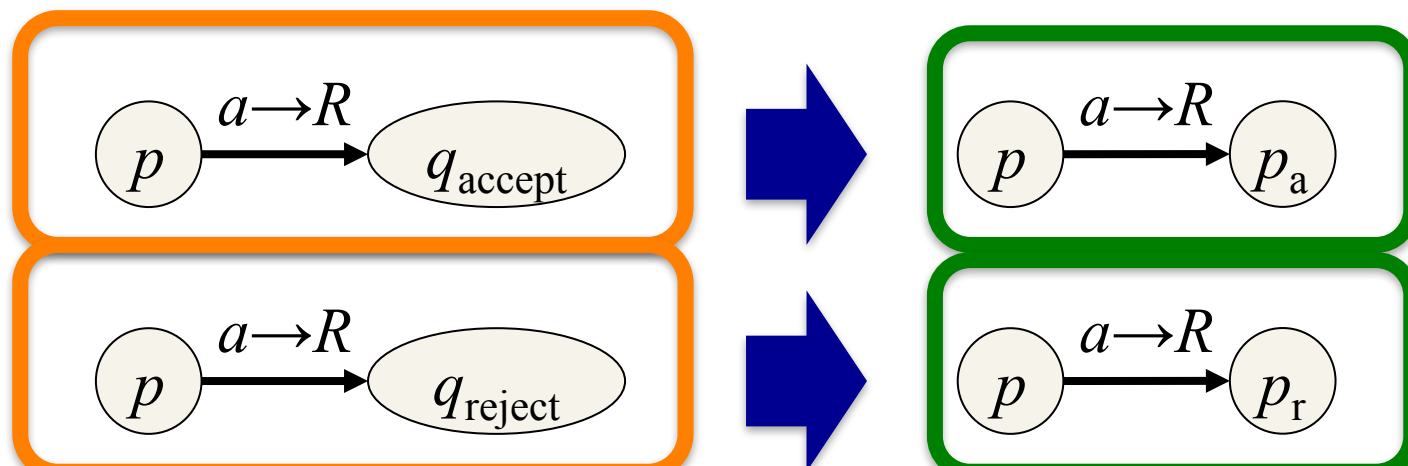


ステップ②

- 2つの状態 p_a, p_r を導入し出力辺を次のように定める.

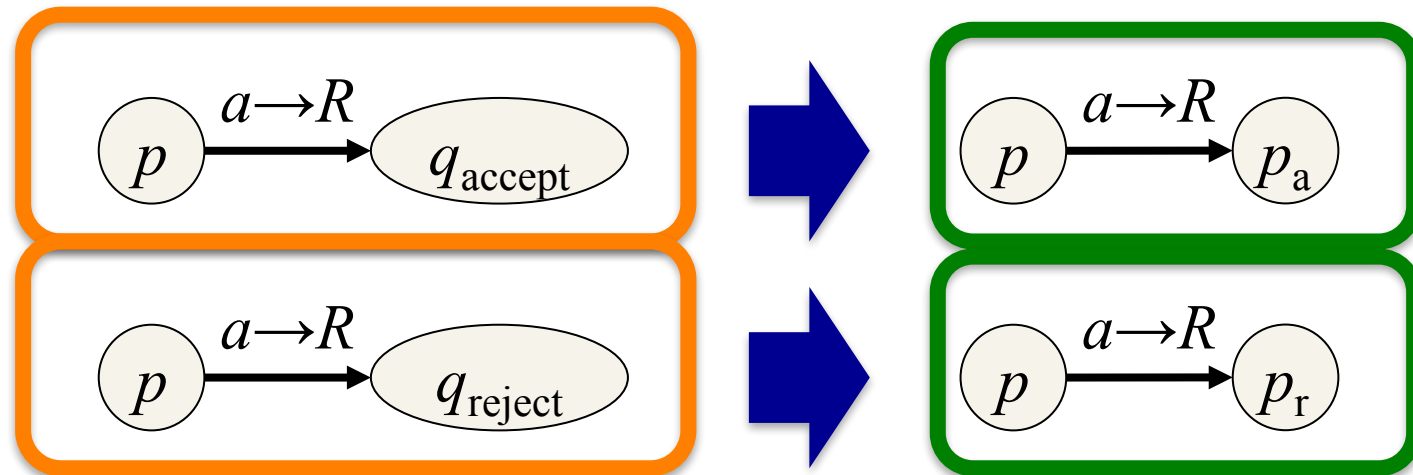


- $B \rightarrow R$ 以外のラベルをもち受理(拒否)状態へ向かう辺について行き先を次のように変更.

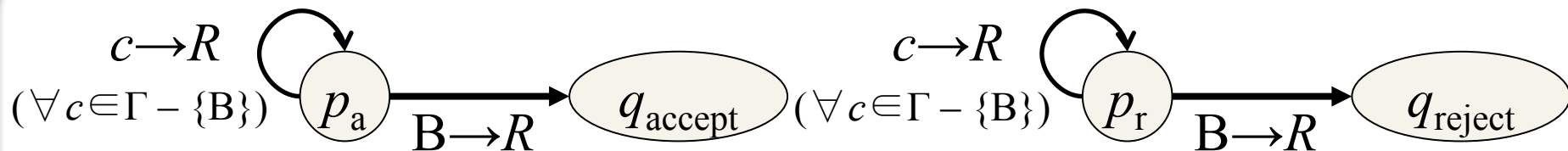


ステップ②

- $B \rightarrow R$ 以外のラベルをもち受理(拒否)状態へ向かう辺について行き先を新たに導入した状態 p_a (p_r) に変更.



- 状態 p_a, p_r の出力辺を次のように定める.



NR-決定性TURING機械

NR-決定性Turing機械

- 状態遷移関数が,

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{ R, N \}$$

の形式をとることを除き, 通常のDTMと同じ.

- 機械は, 各時点でヘッドを右に動かすか, 同じ場所に静止させることができる.
 - 左に動かすことはできない.

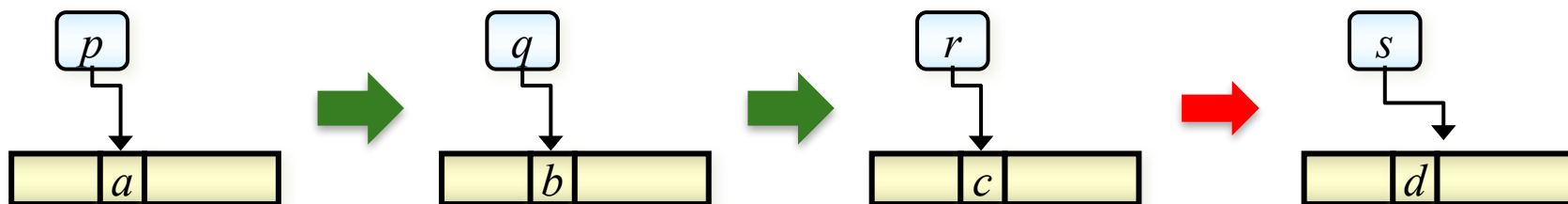
【定理4.6】 NR-DTMの認識する言語のクラスは
正規言語のクラスに一致する.

定理4.6の証明: 方針

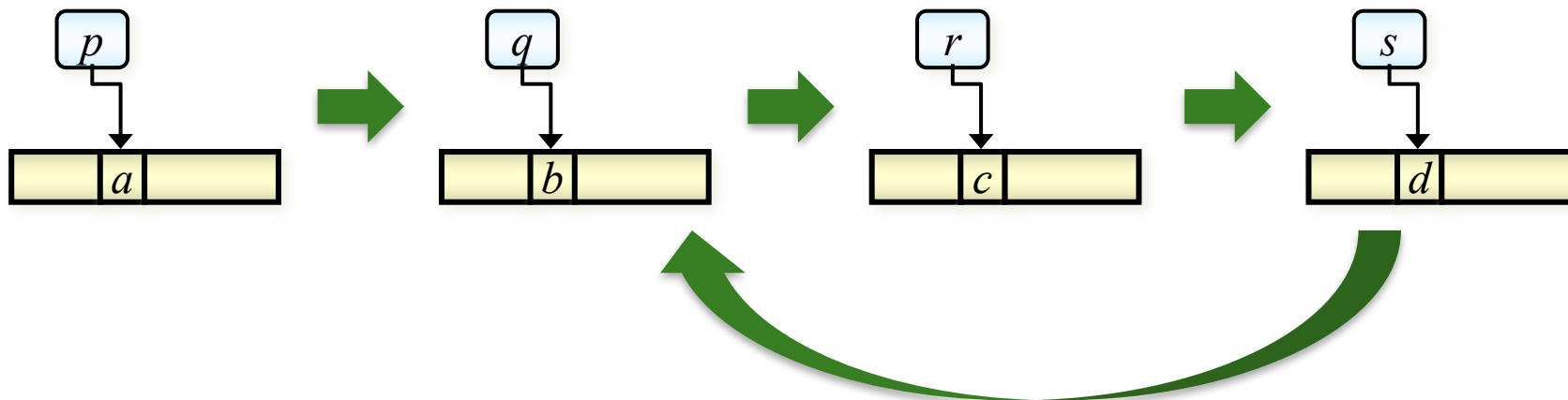
- 次を示せばよい.
 1. すべてのNR-DTMに対しそれと等価なR-DTMが存在する.
 2. すべてのR-DTMに対しそれと等価なNR-DTMが存在する.
- 2は自明なので, 1を示せばよい.

観察: ヘッドを動かさない動作の継続

- ヘッドが動いて終了.



- 無限ループに陥る.



観察: ヘッドを動かさない動作の連続

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ を任意のNR-DTMとする.
- 有向グラフ $G = (V, E)$ を次で定める.
 - $V = (Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}) \times \Gamma$
 - $E = \{ ((p, a), (q, b)) \mid \delta(p, a) = (q, b, N) \}$

【補題4.2】 G の各頂点 u の出次数は高々1である.
したがって u で始まる経路は一意に定まり, 有限長であるか, 無限ループに陥るかのいずれかである.

定理4.6の証明

- すべてのNR-DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ に対し, 等価なR-DTM $M' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta', q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ を次のように構成できる.
- 関数 $\delta': Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R\}$ を以下で定める.
任意の $(p, a) \in V$ に対し
 - (p, a) で始まる経路の終点が (r, c) のとき
 $\delta'(p, a) = \delta(r, c)$.
 - (p, a) で始まる経路が無限ループに陥るとき
 $\delta'(p, a) = (q_{\text{reject}}, a, R)$.

まとめ

まとめ

変種	認識する言語
両側無限テープ決定性Turing機械	Turing認識可能な言語
左リセット決定性Turing機械	
一度書込可決定性Turing機械	
LNR-決定性Turing機械	
R-決定性Turing機械	正規言語
NR-決定性Turing機械	