

計算可能性理論

Computability Theory

1. 決定性Turing機械

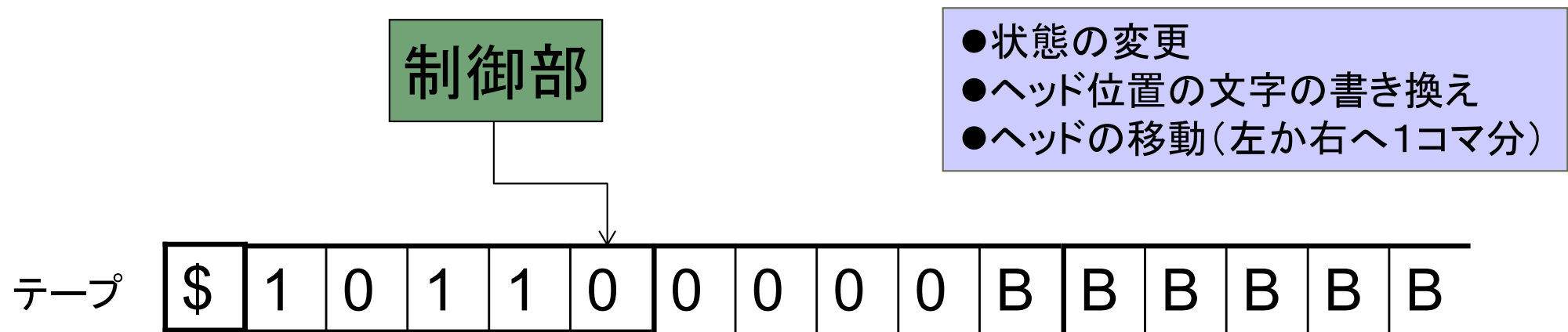
本日の内容

- 決定性Turing機械
- 決定性Turing機械の状態遷移図

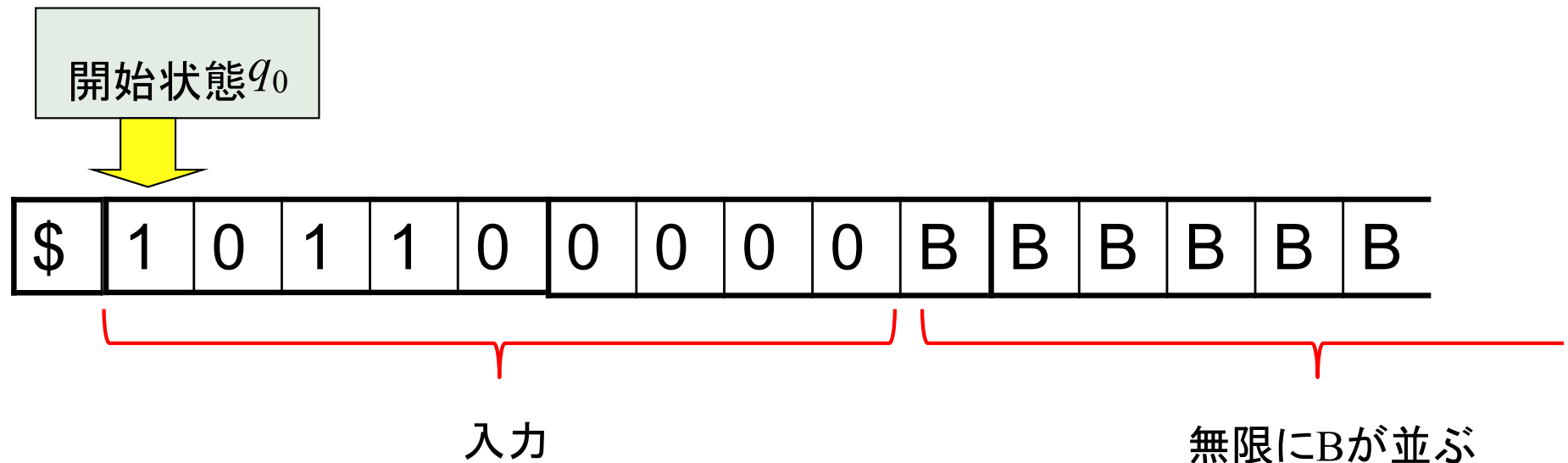
決定性TURING機械

Turing機械とは？

- 有限オートマトンとの違い：
 - テープに対し記号の読出しと書込みが可能である.
 - テープヘッドは左右のどちらにも動くことができる.
 - テープの長さは無限である.
 - 「拒否」「受理」という特別な状態に入ると直ちに停止する.

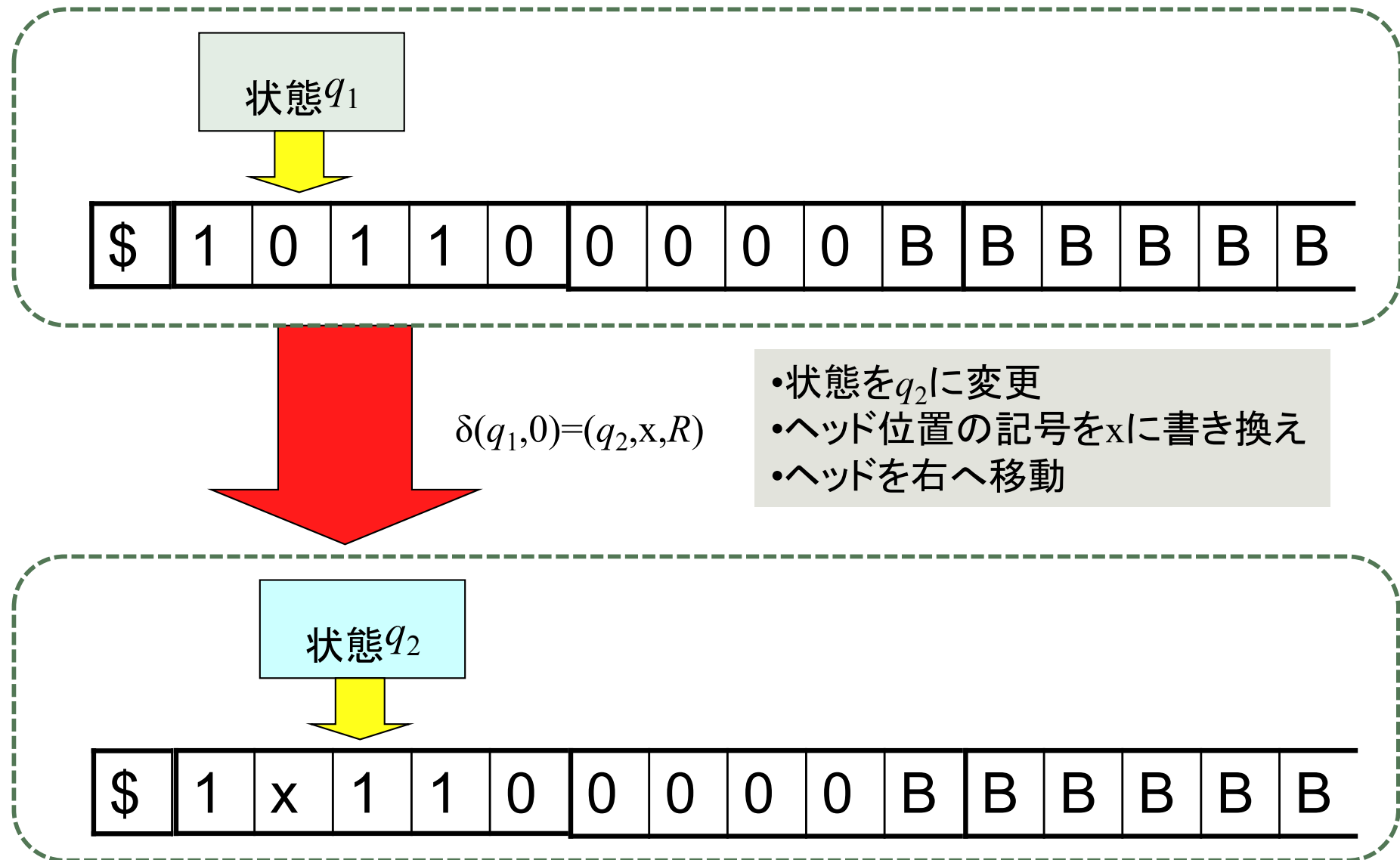


計算開始時の決定性Turing機械



\$ はエンドマーカと呼ばれる特別な文字.
B は空白文字と呼ばれる特別な文字.

決定性Turing機械の動作の1ステップ



Turing機械の動作の1ステップ

- Turing機械の動作は, 3つ組

(q, b, D) ($D=L$ または $D=R$)

で表される. これは以下の意味である.

- 状態を q へ変え,
- ヘッド位置の記号を b に書き換え,
- ヘッドを左または右へ1コマだけ動かす.

- 上記の3つ組 (q, b, D) は

- 現在の状態 p とヘッド位置の記号 a の対 (p, a)

に依存して決まる. この関数を状態遷移関数とよぶ.

決定性Turing機械の形式的定義

【定義】 決定性Turing 機械(DTM)は, 以下を満たす7つ組 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ である.

- Q は状態の非空な有限集合.
- Σ は記号の非空な有限集合で, $\Sigma \cap \{B, \$\} = \emptyset$.
- Γ は記号の非空な有限集合で, $\Sigma \cup \{B, \$\} \subseteq \Gamma$.
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ は状態遷移関数と呼ばれる部分関数で次を満たす.

$$\delta(p, a) \text{ が無定義} \Leftrightarrow p \in \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}.$$

- $q_0 \in Q$ は開始状態.
- $q_{\text{accept}} \in Q$ は受理状態.
- $q_{\text{reject}} \in Q$ は拒否状態で $q_{\text{reject}} \neq q_{\text{accept}}$.

決定性Turing機械の形式的定義(続き)

- 状態遷移関数 δ は以下を満たすものとする:
任意の $p \in Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}$ に対して,
 - ◆ $\delta(p, a) \in Q \times (\Gamma - \{\$ \}) \times \{L, R\}$ ($\forall a \in \Gamma - \{\$ \}$)
 - ◆ $\delta(p, \$) \in Q \times \{\$ \} \times \{R\}$

上記は、ヘッドがテープをはみ出すことを防ぐための条件である。

計算状況

DTM M の状態が $q \in Q$, ヘッドの位置の文字が $a \in \Gamma$, 状態遷移関数 δ の値が $\delta(p, a) = (q, b, D)$ であるとき, M は,

- 状態を q に変え,
- ヘッドの位置の文字 a を b に書き換え,
- ヘッドを $D \in \{L, R\}$ の値に従って左か右へ動かす.

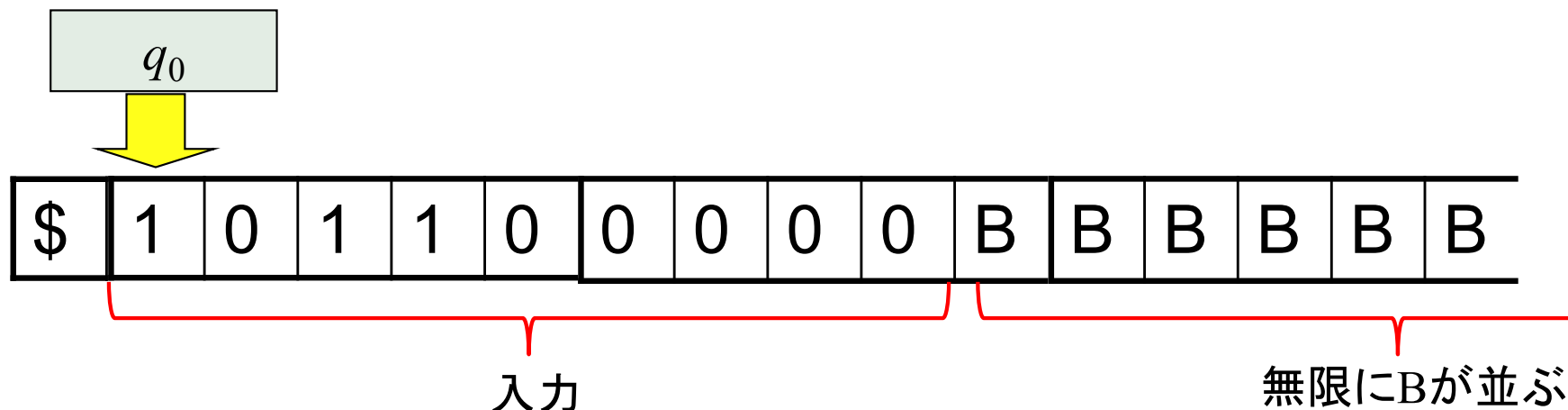
この動作により

状態 $q \in Q$, テープの内容 $\alpha \in \Gamma^*$, ヘッドの位置 $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ に変化が生じる. この3つ組 (q, α, i) を**計算状況**という.

開始計算状況

【定義】 DTM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ の入力 w に対する**開始計算状況**とは, 計算状況 $(q_0, w, 1)$ をいう.

- すなわち, 入力を $w = a_1 \cdots a_n$ とするとき:
 - 状態は開始状態 q_0 であり,
テープヘッドは 1 コマ目にある.
 - $i=1, \dots, n$ について i コマ目は a_i であり,
 $n+1$ コマ以降は無限に B が並ぶ.



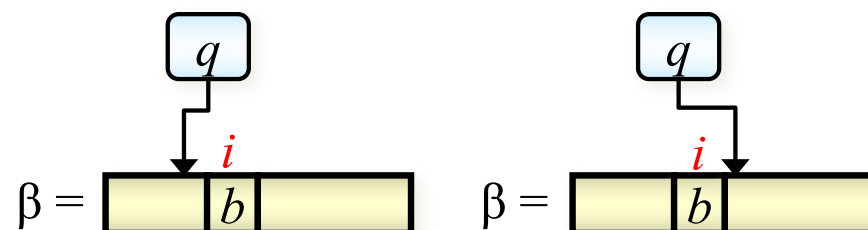
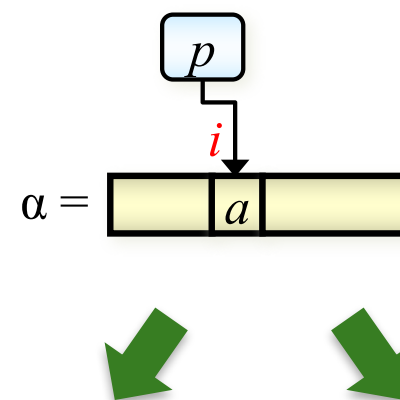
DTMの動作

- DTM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ に対し,
 $Q \times \Gamma^* \times \{0, 1, \dots\}$ 上の2項関係 $\vdash_M$ を次で定義.

$$(p, \alpha, i) \vdash_M (q, \beta, j) \\ \Leftrightarrow$$

$$1. \delta(p, a) = (q, b, D) \quad (a = \alpha[i], b = \beta[i])$$

$$2. j = \begin{cases} i + 1, & \text{if } D = R \\ i - 1, & \text{if } D = L \end{cases}$$



DTMは、初期計算状況からスタートし、
 計算状況を繰り返し変化させてゆくことによ
 って、計算を行う。

受理状況／拒否状況

【定義】 状態が受理状態 q_{accept} (拒否状態 q_{reject}) であるような計算状況を**受理状況**(**拒否状況**)という.

文字列の受理／拒否

【定義】 状態が受理状態 q_{accept} (拒否状態 q_{reject}) であるような計算状況を**受理状況**(**拒否状況**)という.

【定義】 $M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$ をDTMとする.

M が文字列 w を**受理する**とは,

$$(q_0, w, 1) \vdash_M^* (q_{\text{accept}}, \alpha, i) \quad (\exists \alpha \in \Gamma^*, i \in \{0, 1, \dots\})$$

となるときをいい, M が文字列 w を**拒否する**とは

$$(q_0, w, 1) \vdash_M^* (q_{\text{reject}}, \alpha, i) \quad (\exists \alpha \in \Gamma^*, i \in \{0, 1, \dots\})$$

となるときをいう.

DTMによる計算は, 以下のいずれかとなる.

- 受理状況に到達して停止する(**受理**).
- 拒否状況に到達して停止する(**拒否**).
- 永久に動作し続ける(**ループ**).

言語の認識

【定義】 DTM M が言語 L を認識するとは、任意の入力 w に対して M が以下を満たすときをいう.

- $w \in L$ ならば, M は w を受理する.
- $w \notin L$ ならば, M は w を拒否するか, または, ループする.

【定義】 言語 L が Turing 認識可能であるとは, L を認識する DTM が存在するときをいう.

言語の判定

【定義】 DTM M が言語 L を判定するとは、任意の入力 w に対して M が以下を満たすときをいう.

- $w \in L$ ならば, M は w を受理する.
- $w \notin L$ ならば, M は w を拒否する.

【定義】 言語 L が Turing 判定可能であるとは, L を判定するDTMが存在するときをいう.

【命題】 言語 L が Turing 判定可能であるならば, L は Turing 認識可能である.

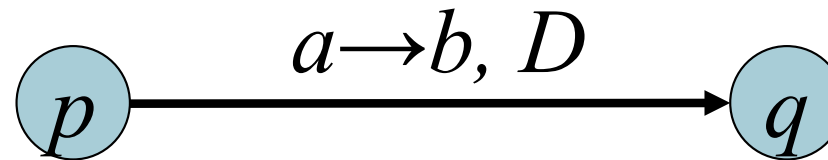
決定性TURING機械の 状態遷移図

例題 1

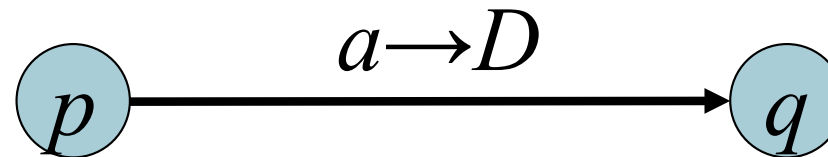
【例題1】 言語 $L = \{ w \mid |w|_a = |w|_b \}$ を判定するDTMを設計せよ.

状態遷移図

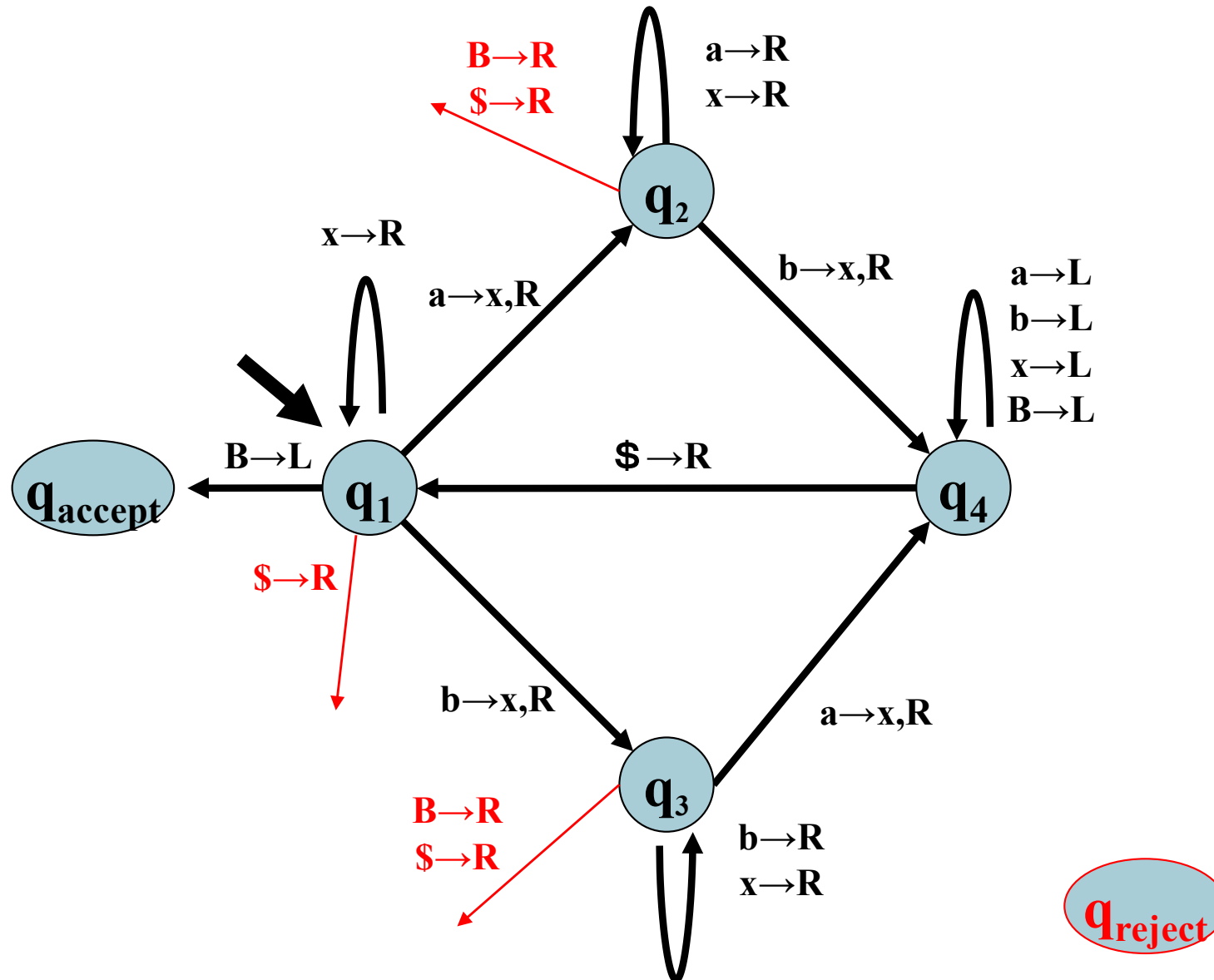
- 遷移 $\delta(p, a)=(q, b, D)$ を次のように表す。



- 遷移 $\delta(p, a)=(q, a, D)$ は次のように略記する。



例題1の解答例



入力 $w=aabbba$ に対する動作例

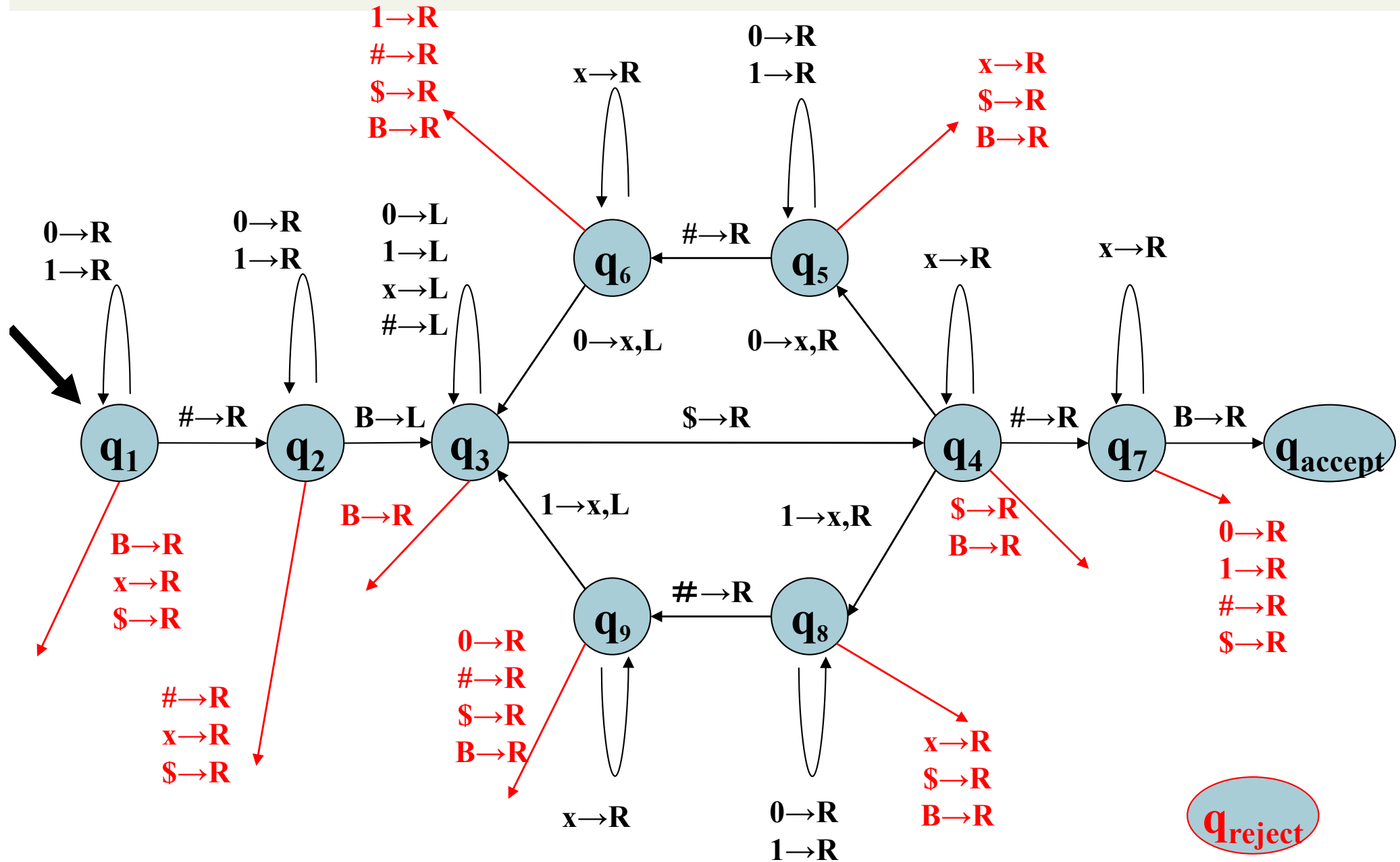
演習問題1-1

【演習問題1.1】 言語 $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ を判定するDTMを設計せよ.

例題2

【例題2】 言語 $L = \{ w\#w \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を判定するDTMを設計せよ.

例題2の解答例



演習問題1-2

【演習問題1.2】 言語 $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を判定するDTMを設計せよ.

演習問題1-3

【演習問題1.3】 言語 $L = \{ 0^n \mid m \geq 0 \text{ が存在して } n = 2^m \}$ を判定するDTMを設計せよ.

課題

- 演習問題1-1, 1-2, 1-3を解いて
次回の講義開始時まで提出せよ。